EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Équations fonctionnelles

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. « Trouver toutes les fonctions » signifie : déterminer les solutions **et** vérifier qu'elles conviennent.

1 Substitutions

Exercice 1 ★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que, pour tout réel x :

$$f(x)+2f(-x)=x^2+x.$$

Exercice 2 ★

Trouver toutes les fonctions $f : R \setminus \{0\} \to R$ telles que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$$

Exercice 3 ★

Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : R \to R$ telle que $f(x)+f(1-x)=x^2$ pour tout réel x.

Exercice 4 ★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x)f(y)-f(xy)=x+y$ pour tous réels x et y.

Exercice 5 ★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x)+xf(1-x)=2x-x^2$ pour tout réel x.

Exercice 6 ★★

Soit D l'ensemble des réels différents de 0 et de 1.

1) Montrer que, si $x \in D$, alors $\dfrac{1}{1-x} \in D$ et $\dfrac{x-1}{x} \in D$, et calculer l'image de x par trois applications successives de $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2) Trouver toutes les fonctions $f : D \to R$ telles que, pour tout $x \in D$:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

Exercice 7 ★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)$ pour tous réels x et y.

2 L'équation de Cauchy

Exercice 8 ★

Trouver toutes les fonctions $f : Q \to Q$ telles que $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$ pour tous rationnels x et y.

Exercice 9 ★★

Trouver toutes les fonctions $f : Q \to Q$ telles que, pour tous rationnels x et y :

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ et } f(xy)=f(x)f(y).$$

Exercice 10 ★★

Trouver toutes les fonctions additives $f : R \to R$ telles que $f(x)^2=x^2$ pour tout réel x.

3 Injectivité, surjectivité, monotonie

Exercice 11 ★

Soit $f : R \to R$ telle que $f(x)^3+f(x)=x$ pour tout réel x. Montrer que f est bijective.

Exercice 12 ★

Montrer qu'il n'existe aucune fonction monotone $f : R \to R$ telle que $f(f(x))=-x$ pour tout réel x.

Exercice 13 ★★

Soit $f : R \to R$ telle que $f(f(x))=x+1$ pour tout réel x.

1) Montrer que f est bijective.

2) Montrer que $f(x+1)=f(x)+1$ pour tout réel x.

3) Donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 14 ★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(xf(y))=xy$ pour tous réels x et y.

Exercice 15 ★★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que, pour tous réels x et y :

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x).$$

Exercice 16 ★★★

Trouver toutes les fonctions croissantes $f : R \to R$ telles que $f(x+f(y))=y+f(x)$ pour tous réels x et y.

4 Polynômes et problèmes olympiques

Exercice 17 ★

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0)=0$ et $P(x+1)-P(x)=2x$ pour tout réel x.

Exercice 18 ★★★

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(x^2)=P(x)^2$ pour tout réel x.

Exercice 19 ★★★

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que, pour tous réels x et y :

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y.$$

Exercice 20 ★★★ *OIM 1992, problème 2*

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que, pour tous réels x et y :

$$f(x^2+f(y))=y+f(x)^2.$$

✅ Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Une fonction additive $f : Q \to R$ vérifie $f(0)=0$.	☐	☐
2. Toute fonction additive $f : R \to R$ est de la forme $x \mapsto c\,x$, sans autre hypothèse.	☐	☐
3. La fonction $x \mapsto x^2$ de R dans R est injective.	☐	☐