COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Équations fonctionnelles

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. De quoi parle-t-on ?
2. La méthode des substitutions
3. L'équation de Cauchy sur les rationnels
4. Injectivité et surjectivité
5. Monotonie et piège « point par point »
6. Équations fonctionnelles polynomiales
7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Trouver **toutes** les solutions d'une équation fonctionnelle, puis **vérifier** qu'elles conviennent.
- Choisir des substitutions efficaces : valeurs particulières, symétries, argument rendu libre.
- Résoudre l'équation de Cauchy $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sur Q, et sur R pour une fonction croissante.
- Exploiter l'injectivité, la surjectivité et la monotonie ; éviter le piège « point par point ».

1 De quoi parle-t-on ?

◆ **Définition — équation fonctionnelle**

Une **équation fonctionnelle** est une égalité dont l'inconnue est une fonction f, et qui doit être vraie pour toutes les valeurs des variables dans un ensemble précisé. **Résoudre** l'équation, c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les fonctions qui la vérifient.

◆ **Méthode — les deux temps d'une résolution**

1) **Analyse.** On suppose que f est solution et l'on en déduit des propriétés, jusqu'à obtenir une liste de candidats.

2) **Synthèse.** On vérifie que chaque candidat est bien solution. Cette étape est **obligatoire** : l'analyse ne fournit que des conditions nécessaires.

◆ **Exemple corrigé — une première équation**

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x+y)=f(x)+y$ pour tous réels x et y.

Solution. *Analyse.* Avec $x=0$: $f(y)=f(0)+y$ pour tout réel y. En posant $c=f(0)$, on obtient $f(y)=y+c$.

Synthèse. Si $f(x)=x+c$, alors $f(x+y)=x+y+c=f(x)+y$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto x+c$, où c est un réel quelconque.

◆ **Exemple corrigé — pourquoi il faut vérifier**

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x)+f(y)=x\,y$ pour tous réels x et y.

Solution. Avec $x=y=0$: $2f(0)=0$. Avec $y=0$: $f(x)+f(0)=0$, donc $f(x)=0$ pour tout x. Mais alors, avec $x=y=1$, on obtiendrait $0=1$: **aucune** fonction ne convient. Sans la synthèse, on aurait conclu à tort que $f=0$ est solution.

2 La méthode des substitutions

◆ **Méthode — substitutions classiques**

- Donner aux variables des valeurs simples : $x=y=0$, $y=0$, $x=1$, $y=-x$, $y=x$.
- Remplacer x par une expression qui **ramène** à x après deux ou trois applications : $-x$, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$. On obtient un système d'équations où les inconnues sont $f(x)$, $f(-x)$, etc.
- Choisir une variable pour **rendre un argument libre** ou pour faire apparaître la même valeur des deux côtés.
- Poser une fonction auxiliaire, par exemple $g(x)=f(x)-x^2$, pour se ramener à une équation connue.

◆ **Exemple corrigé — un système de deux équations**

Trouver toutes les fonctions $f : R \setminus \{0\} \to R$ telles que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$$

Solution. *Analyse.* Remplaçons x par $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$. Notons $A=f(x)$ et $B=f\left(\frac{1}{x}\right)$; on a $A+2B=3x$ et $2A+B=\frac{3}{x}$. En retranchant la première équation du double de la seconde : $3A=\frac{6}{x}-3x$, donc $f(x)=\frac{2}{x}-x$.

Synthèse. $\left(\frac{2}{x}-x\right)+2\left(2x-\frac{1}{x}\right)=3x$. L'unique solution est $x \mapsto \frac{2}{x}-x$.

◆ **Exemple corrigé — rendre l'argument libre**

Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ pour tous réels x et y.

Solution. *Analyse.* Choisissons $x = f(y) : f(0) = 1 - f(y) - y$, donc $f(y) = k - y$ avec $k = 1 - f(0)$. Pour $y = 0$, cela donne $f(0) = k$, d'où $k = 1 - k$ et $k = \frac{1}{2}$. Donc $f(y) = \frac{1}{2} - y$.

Synthèse. $f\left(x - \frac{1}{2} + y\right) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y = 1 - x - y$. L'unique solution est $x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

3 L'équation de Cauchy sur les rationnels

◆ **Définition — fonction additive**

Soit E égal à Q ou à R. Une fonction $f : E \to R$ est **additive** si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y de E (**équation de Cauchy**).

◆ **Théorème — équation de Cauchy sur Q**

Les fonctions additives $f : Q \to R$ sont exactement les fonctions $x \mapsto c\,x$, où c est un réel ; on a alors $c = f(1)$.

◆ **Démonstration**

Ces fonctions sont additives. Réciproquement, soit f additive et $c = f(1)$.

1) Avec $x = y = 0 : f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Avec $y = -x : f(-x) = -f(x)$.

2) Par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, $f(n\,x) = n\,f(x)$ pour tout rationnel x : c'est vrai pour $n = 1$, et $f((n+1)x) = f(n\,x) + f(x)$. Avec 1), cela vaut pour tout entier relatif n. En particulier $f(n) = c\,n$.

3) Soit $x = \frac{p}{q}$ avec p entier relatif et q entier strictement positif. Par 2), $q\,f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = c\,p$, donc $f(x) = c\,\frac{p}{q} = c\,x$.

◆ **Exemple corrigé — se ramener à Cauchy**

Trouver toutes les fonctions $f : Q \to Q$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2\,x\,y$ pour tous rationnels x et y.

Solution. On remarque que $x \mapsto x^2$ est solution, car $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2\,x\,y$. Posons $g(x) = f(x) - x^2$; l'équation devient $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Par le théorème, $g(x) = c\,x$ avec $c = g(1)$ rationnel. Réciproquement, $x \mapsto x^2 + c\,x$ convient pour tout rationnel c. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto x^2 + c\,x$, avec $c \in Q$.

◆ **Attention**

Sur R, sans hypothèse supplémentaire, il existe des fonctions additives qui ne sont pas de la forme $x \mapsto c\,x$ (résultat admis, leur construction dépasse le programme). Une hypothèse comme la monotonie (partie 5) est donc indispensable.

4 Injectivité et surjectivité

◆ **Définition — injection, surjection, bijection**

Soit $f : E \to F$.

- f est **injective** si deux éléments distincts ont des images distinctes : $f(a)=f(b)$ entraîne $a=b$.
- f est **surjective** si tout élément y de F a au moins un antécédent : il existe x dans E tel que $f(x)=y$.
- f est **bijective** si elle est injective et surjective.

◆ **Méthode — prouver et exploiter**

- **Pour prouver l'injectivité** : supposer $f(a)=f(b)$ et substituer dans l'équation pour obtenir $a=b$. C'est souvent possible quand une variable apparaît **seule** dans un membre, comme y dans $f(x+f(y))=y+f(x)$.
- **Pour prouver la surjectivité** : montrer qu'un membre de l'équation prend toutes les valeurs réelles quand une variable varie.
- **Pour exploiter l'injectivité** : obtenir une égalité $f(A)=f(B)$ et conclure $A=B$.
- **Pour exploiter la surjectivité** : introduire un réel a tel que $f(a)=0$ ou $f(a)=1$, puis substituer a.

◆ **Exemple corrigé — ce que l'on tire d'une équation résistante**

Soit $f : R \to R$ telle que $f(f(x))=x^2-x+1$ pour tout réel x. Montrer que $f(1)=1$ et que f n'est pas injective.

Solution. Appliquons f à l'égalité : $f(f(f(x)))=f(x^2-x+1)$. Mais aussi $f(f(f(x)))=f(x)^2-f(x)+1$, en appliquant l'hypothèse au réel $f(x)$. Donc

$$f(x^2-x+1)=f(x)^2-f(x)+1.$$

Pour $x=1$: $f(1)=f(1)^2-f(1)+1$, soit $(f(1)-1)^2=0$ et $f(1)=1$. Ensuite, $f(f(0))=1=f(f(1))$. Si f était injective, on aurait $f(0)=f(1)$, puis $0=1$ en appliquant encore l'injectivité. Donc f n'est pas injective.

5 Monotonie et piège « point par point »

◆ **Théorème — Cauchy sur R avec monotonie**

Les fonctions additives et croissantes $f : R \to R$ sont exactement les fonctions $x \mapsto c\,x$, avec $c \geq 0$.

◆ **Démonstration**

Soit f additive et croissante, et $c=f(1)$. D'après la partie 3, $f(r)=c\,r$ pour tout rationnel r ; de plus $c=f(1)\geq f(0)=0$. Soit x un réel. Pour tous rationnels $r\leq x\leq s$, la croissance donne $c\,r\leq f(x)\leq c\,s$.

- Si $c=0$, on obtient $f(x)=0=c\,x$.
- Si $c>0$ et $f(x)>c\,x$, alors $x<\frac{f(x)}{c}$; il existe un rationnel s tel que $x<s<\frac{f(x)}{c}$ (entre deux réels distincts, il y a toujours un rationnel). Alors $f(x)\leq c\,s<f(x)$: contradiction. Le cas $f(x)<c\,x$ se traite de même avec un rationnel r tel que $\frac{f(x)}{c}<r<x$.

Donc $f(x)=c\,x$. La réciproque est immédiate.

◆ **Attention — le piège « point par point »**

Savoir que, **pour tout** x, $f(x)=x$ **ou** $f(x)=-x$ ne permet pas de conclure que f est la fonction $x\mapsto x$ **ou** la fonction $x\mapsto -x$: le choix peut dépendre de x. Par exemple, la fonction égale à x si x est rationnel et à $-x$ sinon vérifie $f(x)^2=x^2$ pour tout x. Il faut une étape supplémentaire pour exclure les « mélanges ».

◆ **Méthode — sortir du piège**

On suppose qu'il existe a avec le premier cas et b avec le second (en dehors des points où les deux cas coïncident), puis on substitue a, b ou $a+b$ dans l'équation de départ pour obtenir une contradiction.

6 Équations fonctionnelles polynomiales

◆ **Méthode — deviner, puis prouver l'unicité**

1) Chercher une solution particulière en étudiant les **degrés** et les **coefficients dominants**.

2) Former la différence avec la solution trouvée et montrer qu'elle est nulle ou constante, souvent parce qu'un polynôme non nul a un nombre fini de racines (chapitre 6).

◆ **Exemple corrigé — une équation aux différences**

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(x+1)=P(x)+2\,x+1$ pour tout réel x.

Solution. Le polynôme x^2 convient, car $(x+1)^2=x^2+2\,x+1$. Posons $Q(x)=P(x)-x^2$: on a $Q(x+1)=Q(x)$ pour tout réel x, donc, par récurrence, $Q(n)=Q(0)$ pour tout entier naturel n. Le polynôme $Q(x)-Q(0)$ a une infinité de racines : il est nul, et Q est constant. Réciproquement, x^2+c convient pour tout réel c. Les solutions sont les polynômes x^2+c, avec $c\in R$.

7 Fiche mémo

Notion	À retenir
Résoudre	analyse (conditions nécessaires) puis synthèse (vérification)
Substitutions	$x=y=0$; $y=0$; $y=-x$; $x\to -x$, $1-x$, $\frac{1}{x}$

Notion	À retenir
Argument libre	choisir x pour annuler ou fixer l'argument de f
Cauchy sur Q	$f(x+y)=f(x)+f(y) \Rightarrow f(x)=f(1)x$
Cauchy sur R	additive et croissante $\Rightarrow f(x)=c\,x,\ c\geq 0$
Injectivité	$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$
Surjectivité	introduire a tel que $f(a)=0$
Point par point	« pour tout x, $f(x)=x$ ou $-x$ » ne suffit pas
Polynômes	degré, coefficient dominant, infinité de racines