EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski et inégalités liées à l'ordre

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Dans chaque énoncé, l'ensemble auquel appartiennent les variables est précisé ; on demande aussi, sauf mention contraire, d'étudier le cas d'égalité.

1 Cauchy-Schwarz

Exercice 1 ★

Soient a et b des réels tels que $a^2+b^2=1$. Montrer que $3a+4b\leq 5$ et déterminer les couples (a,b) pour lesquels il y a égalité.

Exercice 2 ★

Soient a, b, c, d des réels.

1) Vérifier l'identité $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

2) En déduire que le produit de deux entiers qui sont chacun somme de deux carrés d'entiers est encore somme de deux carrés d'entiers.

3) Écrire $221=13\times 17$ de deux façons comme somme de deux carrés d'entiers naturels.

Exercice 3 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq (a^2+b^2+c^2)^2.$$

Exercice 4 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$.

Exercice 5 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1.$$

Exercice 6 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs.

1) À l'aide de la forme produit de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\big(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\big)\geq (a+b+c)^2.$$

2) En déduire une nouvelle démonstration de l'inégalité de Nesbitt : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Exercice 7 ★★

Soient $n\geq 2$ un entier et $a_1,\dots,a_n$ des réels strictement positifs de somme S. Montrer que :

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Exercice 8 ★★

Soient x, y, z des réels tels que $x+y+z=5$ et $x^2+y^2+z^2=9$. Montrer que $1\leq x\leq\frac{7}{3}$, et préciser les triplets pour lesquels $x=1$ et $x=\frac{7}{3}$.

2 Hölder

Exercice 9 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que $9\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(a+b+c)^3$.

Exercice 10 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\geq(1+abc)^3.$$

Exercice 11 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Exercice 12 ★★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b}}+\sqrt{\frac{b}{b+2c}}+\sqrt{\frac{c}{c+2a}}>1.$$

Exercice 13 ★★★ *USAMO 2004, problème 5*

Soient a, b, c des réels strictement positifs.

1) Montrer que, pour tout réel $t>0$, on a $t^5-t^2+3\geq t^3+2$.

2) En déduire que :

$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\geq(a+b+c)^3.$$

3 Minkowski

Exercice 14 ★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=4$. Montrer que :

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\geq 5.$$

Exercice 15 ★★

Déterminer la plus petite valeur de $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(3-x)^2+4}$ lorsque x décrit R, et préciser pour quelle valeur de x elle est atteinte.

Exercice 16 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que :

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{82}.$$

4 Ordre, symétrisation et inégalité de Schur

Exercice 17 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Indication : comparer la somme à celle obtenue en remplaçant chaque numérateur a^3, b^3, c^3 par b^3, c^3, a^3 respectivement.*

Exercice 18 ★★ *OIM 1975, problème 1*

Soient $n\geq 1$ un entier, $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$ et $y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$ des réels, et $(z_1,\ldots,z_n)$ une permutation de $(y_1,\ldots,y_n)$. Montrer que :

$$(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\leq(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2.$$

Exercice 19 ★★ *OIM 1978, problème 5*

Soient $n\geq 1$ un entier et $a_1,\ldots,a_n$ des entiers strictement positifs deux à deux distincts. Montrer que :

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Exercice 20 ★★

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls tels que $a+b+c=1$. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Schur, que $4(ab+bc+ca)\leq 1+9abc$.

Exercice 21 ★★★ *OIM 2005, problème 3*

Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $xyz\geq 1$.

1) Montrer que $(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\geq(x^2+y^2+z^2)^2$.

2) En déduire que :

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0.$$

✅ Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tous réels a, b, c, on a $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$.	☐	☐
2. Pour une expression cyclique en a, b, c, on peut toujours supposer $a\geq b\geq c$.	☐	☐
3. L'inégalité de Schur est une égalité pour $(a,b,c)=(1,1,0)$.	☐	☐