COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski et inégalités liées à l'ordre

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz : démonstrations et variantes
2. L'inégalité de Hölder
3. L'inégalité de Minkowski
4. Raisonner avec l'ordre
5. L'inégalité de Schur
6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz de deux nouvelles façons et utiliser sa **forme produit**.
- Utiliser l'inégalité de Hölder pour trois familles, notamment pour **éliminer des racines carrées**.
- Utiliser l'inégalité de Minkowski pour minorer une **somme de racines carrées**.
- Exploiter l'ordre des variables : « sans perte de généralité », familles rangées dans le même ordre, inégalité de Schur.

Ce chapitre prolonge le chapitre 1, où l'on a établi l'inégalité de Cauchy-Schwarz par un trinôme, sa forme de Titu, l'inégalité de réarrangement et celle de Tchebychev. Dans tout le chapitre, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz : démonstrations et variantes

◆ **Théorème — inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel)**

Pour tous réels $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$:

$$\left(a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les deux familles sont **proportionnelles** : tous les a_i sont nuls, ou il existe un réel k tel que $b_i=k\,a_i$ pour tout i.

◆ Démonstration par l'identité de Lagrange

Le produit $\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)$ est la somme des n^2 termes $a_i^2 b_j^2$; le carré $\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2$ est la somme des n^2 termes $a_i b_i a_j b_j$. Pour $i=j$, les deux termes sont égaux. Pour $i<j$, on regroupe les termes d'indices (i,j) et (j,i) : leur contribution à la différence vaut $a_i^2 b_j^2+a_j^2 b_i^2-2a_i b_j a_j b_i=\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2$. On obtient l'**identité de Lagrange** :

$$\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)-\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2\ge 0.$$

Il y a égalité si et seulement si $a_i b_j=a_j b_i$ pour tous $i<j$, ce qui traduit la proportionnalité des deux familles.

◆ Démonstration par normalisation

Si l'une des familles est nulle, les deux membres sont nuls. Sinon, posons $A=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ et $B=\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$, qui sont strictement positifs. Pour tout i, l'inégalité $2xy\le x^2+y^2$ donne

$$\frac{a_i b_i}{AB}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{A^2}+\frac{b_i^2}{B^2}\right).$$

En sommant, on obtient $\dfrac{a_1 b_1+\cdots+a_n b_n}{AB}\le\dfrac{1}{2}(1+1)=1$, puis, en appliquant ce résultat à la famille $(-a_i)$, $\left|a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right|\le AB$, ce qui est l'inégalité cherchée.

◆ Remarque

La démonstration par normalisation est la plus importante : c'est **exactement la même idée** qui démontrera l'inégalité de Hölder, en remplaçant $2xy\le x^2+y^2$ par l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres.

◆ Propriété — forme produit de Cauchy-Schwarz

Pour tous réels strictement positifs $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\right)\left(x_1 y_1+\cdots+x_n y_n\right)\ge\left(x_1+\cdots+x_n\right)^2.$$

◆ Démonstration

On applique Cauchy-Schwarz aux familles $a_i=\sqrt{\dfrac{x_i}{y_i}}$ et $b_i=\sqrt{x_i y_i}$, dont le produit vaut $a_i b_i=x_i$.

◆ **Exemple corrigé — une somme d'inverses**

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

Solution. Par Cauchy-Schwarz appliqué aux familles $\left(\sqrt{a+b},\sqrt{b+c},\sqrt{c+a}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}},\frac{1}{\sqrt{b+c}},\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)$:

$$\big((a+b)+(b+c)+(c+a)\big)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq(1+1+1)^2=9.$$

Comme $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$, on conclut en divisant par 2. Égalité si et seulement si $a=b=c$.

◆ **Méthode — bien choisir les deux familles**

1) Repérer le cas d'égalité (souvent $a=b=c$) : les familles choisies doivent y être proportionnelles, sinon l'inégalité obtenue est trop faible.

2) Choisir a_i et b_i pour que le produit a_ib_i soit **simple** (une constante, une variable) : c'est lui qui apparaît à droite.

3) Contrôler que le second facteur obtenu se calcule ou se majore facilement.

2 L'inégalité de Hölder

◆ **Théorème — inégalité de Hölder pour trois familles**

Pour tous réels strictement positifs $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ et $c_1,\dots,c_n$:

$$\left(a_1^3+\cdots+a_n^3\right)\left(b_1^3+\cdots+b_n^3\right)\left(c_1^3+\cdots+c_n^3\right)\geq\left(a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n\right)^3,$$

avec égalité si et seulement si les trois familles $\left(a_i^3\right)$, $\left(b_i^3\right)$ et $\left(c_i^3\right)$ sont proportionnelles.

◆ **Démonstration**

Posons $A=\sqrt[3]{a_1^3+\cdots+a_n^3}$, $B=\sqrt[3]{b_1^3+\cdots+b_n^3}$ et $C=\sqrt[3]{c_1^3+\cdots+c_n^3}$. Pour tout i, l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux trois nombres $\frac{a_i^3}{A^3}$, $\frac{b_i^3}{B^3}$, $\frac{c_i^3}{C^3}$ donne

$$\frac{a_ib_ic_i}{ABC}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{a_i^3}{A^3}+\frac{b_i^3}{B^3}+\frac{c_i^3}{C^3}\right).$$

En sommant pour $i=1,\dots,n$: $\frac{a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n}{ABC}\leq\frac{1}{3}(1+1+1)=1$. En élevant au cube, on obtient l'inégalité. Il y a égalité si et seulement si, pour tout i, $\frac{a_i^3}{A^3}=\frac{b_i^3}{B^3}=\frac{c_i^3}{C^3}$, ce qui est la proportionnalité annoncée.

◆ **Remarque**

Avec $c_i=1$ pour tout i, on obtient $\left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\cdot n\geq\left(\sum a_i b_i\right)^3$. La même démonstration, avec l'inégalité arithmético-géométrique pour k nombres, donne l'inégalité de Hölder pour k familles : le produit des k sommes de puissances k-ièmes est supérieur ou égal à la puissance k-ième de la somme des produits.

◆ **Propriété — la forme utile en compétition**

Pour tous réels strictement positifs $x_1,\dots,x_n$ et $w_1,\dots,w_n$:

$$\left(x_1+\cdots+x_n\right)^2\left(w_1+\cdots+w_n\right)\geq\left(\sqrt[3]{x_1^2w_1}+\cdots+\sqrt[3]{x_n^2w_n}\right)^3.$$

◆ **Démonstration**

On applique le théorème aux familles $a_i=b_i=\sqrt[3]{x_i}$ et $c_i=\sqrt[3]{w_i}$.

◆ **Exemple corrigé — OIM 2001, problème 2**

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Solution. Notons S le membre de gauche. Appliquons la forme utile avec $x_1=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$ et $w_1=a\left(a^2+8bc\right)$, et de même pour les deux autres termes : on a $x_1^2w_1=a^3$, donc $\sqrt[3]{x_1^2w_1}=a$. On obtient

$$S^2\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)\geq\left(a+b+c\right)^3.$$

Il suffit donc de prouver que $\left(a+b+c\right)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$. Or, en développant,

$$\left(a+b+c\right)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)-24abc=3\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right)-18abc,$$

qui est positif car, par l'inégalité arithmético-géométrique, la somme des six termes est supérieure ou égale à $6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc$. Donc $S^2\geq 1$, puis $S\geq 1$. Égalité si et seulement si $a=b=c$.

◆ **Méthode — Hölder pour éliminer des racines carrées**

Face à une somme $\sum\dfrac{u_i}{\sqrt{v_i}}$ à minorer, on cherche des poids w_i tels que $\left(\dfrac{u_i}{\sqrt{v_i}}\right)^2 w_i$ soit un **cube simple** : on prend $w_i=\dfrac{v_i\cdot t_i^3}{u_i^2}$, où t_i est la quantité que l'on veut voir apparaître. Il reste à majorer la somme $\sum w_i$.

3 L'inégalité de Minkowski

◆ Théorème — inégalité de Minkowski

Pour tous réels $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^2+\left(b_1+\cdots+b_n\right)^2}.$$

Lorsque les a_i et les b_i sont strictement positifs, il y a égalité si et seulement si les rapports $\dfrac{a_i}{b_i}$ sont tous égaux.

◆ Démonstration

Traitons d'abord $n=2$. Les deux membres étant positifs, l'inégalité équivaut à celle de leurs carrés :

$$a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}\geq a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\left(a_1a_2+b_1b_2\right),$$

soit $\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}\geq a_1a_2+b_1b_2$, ce qui découle de Cauchy-Schwarz. Le cas général s'obtient par récurrence sur n : on applique le cas $n=2$ aux couples $\left(a_1+\cdots+a_{n-1},b_1+\cdots+b_{n-1}\right)$ et $\left(a_n,b_n\right)$.

◆ Interprétation géométrique

Dans un repère orthonormé, plaçons $M_0=(0,0)$, $M_1=(a_1,b_1)$, $M_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, et ainsi de suite. Le membre de gauche est la longueur de la ligne brisée $M_0M_1\dots M_n$, celui de droite la distance M_0M_n : **le chemin le plus court entre deux points est le segment**. L'égalité a lieu lorsque les points sont alignés dans cet ordre.

◆ Exemple corrigé — un minimum sans calcul différentiel

Déterminer la plus petite valeur de $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(4-x)^2+1}$ lorsque x décrit R.

Solution. Par Minkowski appliqué aux couples $(x,2)$ et $(4-x,1)$:

$$f(x)\geq\sqrt{(x+4-x)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5.$$

L'égalité exige $\dfrac{x}{2}=\dfrac{4-x}{1}$, soit $x=\dfrac{8}{3}$; on vérifie que $f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{10}{3}+\dfrac{5}{3}=5$. Le minimum vaut 5.

◆ Attention

Pour atteindre le cas d'égalité, il faut **ordonner les couples** de façon que les rapports $\dfrac{a_i}{b_i}$ puissent être égaux. Écrire $\sqrt{(4-x)^2+1}=\sqrt{(x-4)^2+1}$ et appliquer Minkowski aux couples $(x,2)$ et $(x-4,1)$ donnerait la minoration $\sqrt{(2x-4)^2+9}$, qui dépend encore de x et ne permet pas de conclure.

4 Raisonner avec l'ordre

◆ Propriété — familles rangées dans le même ordre

Si $a \geq b$ et $x \geq y$, ou si $a \leq b$ et $x \leq y$, alors $(a-b)(x-y) \geq 0$, c'est-à-dire $a\,x + b\,y \geq a\,y + b\,x$.

◆ Méthode — « sans perte de généralité »

- Si l'expression est **symétrique** (inchangée par toute permutation des variables), on peut supposer $a \geq b \geq c$.
- Si l'expression est seulement **cyclique** (inchangée quand on remplace a par b, b par c et c par a), on peut seulement supposer que a est le plus grand ; il reste deux cas : $a \geq b \geq c$ et $a \geq c \geq b$.

◆ Exemple corrigé — une expression cyclique

Soient a, b, c des réels tels que $a \geq b \geq c$. Montrer que $a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq a b^2 + b c^2 + c a^2$.

Solution. On vérifie en développant que

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a - a b^2 - b c^2 - c a^2 = (a-b)(b-c)(a-c).$$

Les trois facteurs sont positifs, d'où le résultat. Si l'on suppose seulement que a est le plus grand, l'inégalité peut être fausse : pour $(a,b,c) = (2,0,1)$, le membre de gauche vaut 2 et celui de droite vaut 4.

◆ Attention

On ne peut pas supposer $a \geq b \geq c$ pour une expression seulement cyclique : l'exemple précédent le montre.

5 L'inégalité de Schur

◆ Théorème — inégalité de Schur

Pour tous réels positifs ou nuls a, b, c :

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$, ou deux des nombres sont égaux et le troisième est nul.

◆ Démonstration

L'expression est symétrique : supposons $a \geq b \geq c \geq 0$. Le dernier terme $c(c-a)(c-b) = c(a-c)(b-c)$ est positif. Les deux premiers se regroupent :

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) = (a-b)\big[a(a-c) - b(b-c)\big].$$

Or $a \geq b \geq 0$ et $a - c \geq b - c \geq 0$, donc $a(a-c) \geq b(b-c)$; le crochet et $a-b$ sont positifs. La somme est positive. Le cas d'égalité se lit sur cette démonstration.

◆ **Propriété — formes équivalentes**

Posons $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ et $r=abc$. L'inégalité de Schur s'écrit aussi :

1) $a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$;

2) $p^3-4pq+9r\geq 0$.

◆ **Exemple corrigé — Schur sous contrainte**

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls tels que $a+b+c=3$. Montrer que $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc\geq 9$.

Solution. Avec $p=3$, la forme 2) donne $27-12q+9r\geq 0$, soit $3r\geq 4q-9$. Comme $a^2+b^2+c^2=p^2-2q=9-2q$:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc=18-4q+3r\geq 18-4q+4q-9=9.$$

Égalité pour $a=b=c=1$, mais aussi pour $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$: ce double cas d'égalité est la signature de Schur.

◆ **Méthode — quand penser à Schur**

L'inégalité est symétrique, de degré 3, et son cas d'égalité contient à la fois $a=b=c$ et un cas du type $(t,t,0)$. L'inégalité arithmético-géométrique, qui n'a que $a=b=c$ comme cas d'égalité, échouera alors toujours.

6 Fiche mémo

Notion	À retenir
Lagrange	$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)-\left(\sum a_ib_i\right)^2=\sum_{i<j}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$
Forme produit	$\left(\sum\frac{x_i}{y_i}\right)\left(\sum x_iy_i\right)\geq\left(\sum x_i\right)^2$
Hölder	$\left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\left(\sum c_i^3\right)\geq\left(\sum a_ib_ic_i\right)^3$
Forme utile	$\left(\sum x_i\right)^2\left(\sum w_i\right)\geq\left(\sum\sqrt[3]{x_i^2w_i}\right)^3$
Minkowski	$\sum\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geq\sqrt{\left(\sum a_i\right)^2+\left(\sum b_i\right)^2}$
Même ordre	$(a-b)(x-y)\geq 0$
Sans perte de généralité	symétrique : $a\geq b\geq c$; cyclique : a le plus grand
Schur	$\sum a(a-b)(a-c)\geq 0$; $p^3-4pq+9r\geq 0$