EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 7 — Relations de Viète et identités de Newton

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Les polynômes sont à coefficients réels ; lorsqu'un énoncé parle des racines d'un polynôme, ce polynôme est **scindé** : ses racines sont réelles et leur nombre, compté avec multiplicité, est égal à son degré. Dans chaque cas, on peut le vérifier, mais ce n'est pas demandé.

1 Relations de Viète

Exercice 1 ★

Soient a et b les racines du trinôme x^2-7x+5. Calculer a^2+b^2, a^3+b^3 et $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Exercice 2 ★

Déterminer les réels m pour lesquels le trinôme $x^2-mx+12$ a deux racines réelles dont la différence vaut 1.

Exercice 3 ★

Soient a, b, c les racines du polynôme x^3-3x^2-x+2. Calculer $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc, puis $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Exercice 4 ★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y, z :

$$x+y+z=6,\ xy+yz+zx=9,\ xyz=4.$$

Exercice 5 ★★

Avec les notations de l'exercice 3, calculer $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$ et $a^2+b^2+c^2$.

Exercice 6 ★★

Soient a, b, c les racines du polynôme $x^3-6x^2+11x-6$. Calculer, sans chercher les racines :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

Exercice 7 ★★

Déterminer le réel m pour lequel les racines du polynôme x^3-6x^2+mx-6 sont en progression arithmétique, et préciser ces racines.

Exercice 8 ★★

Déterminer le réel m pour lequel les racines du polynôme x^3-7x^2+mx-8 sont en progression géométrique, et préciser ces racines.

Exercice 9 ★★

Déterminer les réels m pour lesquels le polynôme x^3-7x+m a trois racines réelles dont l'une est le double d'une autre.

2 Transformations et sommes de puissances

Exercice 10 ★★

Soient a, b, c les racines du polynôme x^3-4x+1. Déterminer le polynôme unitaire dont les racines sont $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, puis calculer $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}$.

Exercice 11 ★★

Soient a, b, c les racines du polynôme x^3-4x+1. Déterminer le polynôme unitaire dont les racines sont a^2, b^2, c^2.

Exercice 12 ★

Soient x et y des réels tels que $x+y=3$ et $xy=1$. Calculer x^4+y^4 et x^6+y^6.

Exercice 13 ★★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=0$ et $a^2+b^2+c^2=1$. Calculer $a^4+b^4+c^4$.

Exercice 14 ★★★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=5$ et $a^3+b^3+c^3=9$. Calculer abc, puis $a^4+b^4+c^4$, puis déterminer a, b, c.

Exercice 15 ★★★

Soient a, b, c les racines du polynôme x^3-3x+1.

1) Montrer que, si α est une racine de ce polynôme, alors α^2-2 en est aussi une.

2) Calculer $a^7+b^7+c^7$.

Exercice 16 ★★★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=0$. Montrer que :

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\times\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

3 Racines réelles

Exercice 17 ★★

Soient a, b, c des réels. Montrer que si le polynôme x^3+ax^2+bx+c est scindé, alors $a^2\geq 3b$. En déduire que x^3+x^2+x+5 n'est pas scindé.

Exercice 18 ★★★

Soit $n \geq 2$ un entier et $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$ un polynôme à coefficients réels.

1) Montrer que, pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, on a $n\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \geq \left(x_1 + \cdots + x_n\right)^2$.

2) En déduire que si P est scindé, alors $(n-1)a_1^2 \geq 2n\,a_2$.

Exercice 19 ★★★

Montrer que le polynôme $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 5$ n'est pas scindé.

Exercice 20 ★★★

Soit P un polynôme scindé de degré $n \geq 1$, à coefficients réels, dont toutes les racines $x_1, \ldots, x_n$ sont strictement positives. On suppose que $P(x) = x^n - n x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n$. Montrer que $P(x) = (x-1)^n$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Les racines de $2x^2 - 6x + 1$ ont pour somme 3.	☐	☐
2. Les racines de $x^3 - 2x + 7$, si elles sont toutes réelles, ont pour produit 7.	☐	☐
3. Si x_1, x_2, x_3 sont réels, alors $e_1^2 \geq 3e_2$.	☐	☐