COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 7 — Relations de Viète et identités de Newton

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Les relations de Viète
2. Expressions symétriques des racines
3. Transformer les racines d'un polynôme
4. Les identités de Newton
5. Une condition nécessaire pour avoir des racines réelles
6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Relier les coefficients d'un polynôme à la somme, à la somme des produits deux à deux et au produit de ses racines.
- Calculer une expression symétrique des racines **sans calculer les racines**.
- Construire un polynôme dont les racines se déduisent de celles d'un polynôme donné.
- Calculer les sommes de puissances des racines grâce aux identités de Newton.

1 Les relations de Viète

Dans tout le chapitre, les polynômes sont à coefficients réels. On dit que P, de degré n et de coefficient dominant a, est **scindé** s'il existe des réels $x_1, \dots, x_n$, distincts ou non, tels que $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ pour tout réel x ; les x_i sont alors **les** n racines de P, comptées avec leur ordre de multiplicité. Tous les polynômes de ce chapitre dont on utilise les racines sont scindés.

◆ **Théorème — relations de Viète en degré 3**

Soit $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$, avec $a \neq 0$, un polynôme scindé de racines x_1, x_2, x_3. Alors

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

◆ **Démonstration**

On développe $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - x_1 x_2 x_3\right]$ et l'on identifie les coefficients avec ceux de P, ce qui est permis car l'égalité a lieu pour tout réel x (chapitre 6).

◆ Théorème — relations de Viète en degré n

Soit $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, avec $a_n\neq 0$, un polynôme scindé de racines $x_1,\ldots,x_n$. Pour $k=1,\ldots,n$, notons σ_k la somme de tous les produits de k racines d'indices distincts. Alors

$$\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

En particulier $x_1+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ et $x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$.

◆ Démonstration

En développant $(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, on obtient un terme de degré $n-k$ en choisissant $-x_i$ dans exactement k des facteurs et x dans les autres ; le coefficient de x^{n-k} est donc $(-1)^k\sigma_k$. On identifie avec $\dfrac{P(x)}{a_n}$.

◆ Exemple corrigé — un système à trois inconnues

Résoudre le système $x+y+z=2$, $xy+yz+zx=-1$, $xyz=-2$, d'inconnues réelles.

Solution. Par Viète, x, y, z sont les racines de $t^3-2t^2-t+2=(t-2)(t-1)(t+1)$. Les solutions sont les six triplets obtenus en permutant $(2,1,-1)$.

2 Expressions symétriques des racines

◆ Définition — fonctions symétriques élémentaires

Pour trois réels x_1, x_2, x_3, on note $e_1=x_1+x_2+x_3$, $e_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $e_3=x_1x_2x_3$. Une expression des x_i est **symétrique** si elle ne change pas quand on permute les x_i.

◆ Propriété — formules usuelles

Pour tous réels x_1, x_2, x_3 :

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=e_1^2-2e_2$;

2) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=e_1^3-3e_1e_2+3e_3$;

3) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=e_1e_2-e_3$;

4) $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=e_1e_2-3e_3$;

5) $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=e_2^2-2e_1e_3$;

6) si les x_i sont non nuls : $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{e_2}{e_3}$.

◆ **Démonstration**

1) et 2) ont été vus au chapitre 2. 4) En développant $e_1 e_2$, on obtient les six termes $x_i^2 x_j$ et trois fois $x_1 x_2 x_3$. 3) $(e_1 - x_3)(e_1 - x_1)(e_1 - x_2) = e_1^3 - e_1^2 \cdot e_1 + e_1 e_2 - e_3$. 5) $e_2^2 = \sum x_i^2 x_j^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)$. 6) On réduit au même dénominateur.

◆ **Remarque**

On peut démontrer que **toute** expression polynomiale symétrique des racines s'écrit comme un polynôme en e_1, e_2, e_3 (théorème fondamental des polynômes symétriques, admis ici). C'est pourquoi on peut toujours calculer une telle expression à partir des coefficients.

◆ **Exemple corrigé — sans calculer les racines**

Soient a et b les racines du trinôme $x^2 - 5x + 3$, dont le discriminant 13 est strictement positif. Calculer $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Solution. Par Viète, $a + b = 5$ et $ab = 3$. Donc $a^2 + b^2 = 25 - 6 = 19$, $a^3 + b^3 = 125 - 3 \times 3 \times 5 = 80$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{3}$.

3 Transformer les racines d'un polynôme

◆ **Méthode — polynôme dont les racines sont transformées**

Soit P un polynôme scindé de racines $x_1, \ldots, x_n$.

- Racines $x_i + h$: le polynôme $P(x - h)$ convient.
- Racines $k x_i$, avec $k \neq 0$: le polynôme $P\left(\frac{x}{k}\right)$ convient.
- Racines $\frac{1}{x_i}$, si $P(0) \neq 0$: le polynôme $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$, obtenu en **renversant l'ordre des coefficients**, convient.
- Racines x_i^2 : on calcule les fonctions symétriques élémentaires des x_i^2 à l'aide de celles des x_i.

◆ **Exemple corrigé — les carrés des racines**

Le polynôme $P(x) = x^3 - 3x + 1$ est scindé, de racines a, b, c. Déterminer le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont a^2, b^2, c^2.

Solution. Ici $e_1 = 0$, $e_2 = -3$ et $e_3 = -1$. Pour les carrés : leur somme vaut $e_1^2 - 2e_2 = 6$, la somme de leurs produits deux à deux vaut $e_2^2 - 2e_1 e_3 = 9$, et leur produit vaut $e_3^2 = 1$. Le polynôme cherché est $x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

4 Les identités de Newton

◆ Définition — sommes de puissances

Pour des réels $x_1, \dots, x_n$ et un entier naturel k, on note $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. En particulier $S_0 = n$.

◆ Théorème — identités de Newton

1) Si x_1 et x_2 sont les racines de $x^2 - s\,x + p$, alors $S_k = s\,S_{k-1} - p\,S_{k-2}$ pour tout $k \geq 2$.

2) Si x_1, x_2, x_3 sont les racines de $x^3 - e_1 x^2 + e_2 x - e_3$, alors pour tout $k \geq 3$:

$$S_k = e_1 S_{k-1} - e_2 S_{k-2} + e_3 S_{k-3}.$$

◆ Démonstration

2) Chaque racine x_i vérifie $x_i^3 = e_1 x_i^2 - e_2 x_i + e_3$. En multipliant par x_i^{k-3}, on obtient $x_i^k = e_1 x_i^{k-1} - e_2 x_i^{k-2} + e_3 x_i^{k-3}$; on somme pour $i = 1, 2, 3$. Le cas 1) est identique.

◆ Méthode — calculer une somme de puissances

1) Calculer $S_0 = n$, $S_1 = e_1$ et $S_2 = e_1^2 - 2\,e_2$.

2) Appliquer la relation de Newton de proche en proche.

◆ Exemple corrigé — une somme de puissances cinquièmes

Soient x et y des réels tels que $x + y = 1$ et $x\,y = -1$. Calculer $x^5 + y^5$.

Solution. Ici $S_k = S_{k-1} + S_{k-2}$, avec $S_0 = 2$ et $S_1 = 1$. On obtient $S_2 = 3$, $S_3 = 4$, $S_4 = 7$, puis $x^5 + y^5 = S_5 = 11$.

5 Une condition nécessaire pour avoir des racines réelles

◆ Théorème — racines toutes réelles

Si le polynôme $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ est scindé, alors $a^2 \geq 3\,b$.

◆ Démonstration

Ses racines x_1, x_2, x_3 sont réelles et vérifient $e_1 = -a$ et $e_2 = b$. Or $e_1^2 - 3\,e_2 = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\right] \geq 0$ (chapitre 1).

◆ Attention

La réciproque est fausse : x^3+1 vérifie $a^2=0\geq 0=3b$, mais il n'est pas scindé ($x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ et le second facteur n'a pas de racine réelle). Le théorème sert à prouver qu'un polynôme **n'est pas** scindé.

6 Fiche mémo

Notion	À retenir
Viète, degré 2	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$
Viète, degré 3	$e_1=-\frac{b}{a}$; $e_2=\frac{c}{a}$; $e_3=-\frac{d}{a}$
Degré n	$\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$
Carrés	$\sum x_i^2=e_1^2-2e_2$; $\sum x_i^2x_j^2=e_2^2-2e_1e_3$
Cubes	$\sum x_i^3=e_1^3-3e_1e_2+3e_3$
Produit	$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=e_1e_2-e_3$
Inverses	racines $\frac{1}{x_i}$: renverser l'ordre des coefficients
Newton	$S_k=e_1S_{k-1}-e_2S_{k-2}+e_3S_{k-3}$
Racines réelles	x^3+ax^2+bx+c scindé $\Rightarrow a^2\geq 3b$