EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Polynômes : les fondations

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Sauf mention contraire, les polynômes sont à coefficients réels, la variable x décrit l'ensemble des réels, et une égalité entre polynômes est vraie pour tout réel x.

1 Division et racines

Exercice 1 ★

Effectuer la division euclidienne de x^5-1 par x^2+x+1.

Exercice 2 ★

Déterminer les réels a et b pour lesquels le polynôme x^4+ax^2+b est divisible par x^2-3x+2.

Exercice 3 ★

Factoriser le polynôme x^3-7x+6 en produit de polynômes de degré 1.

Exercice 4 ★

Déterminer les racines rationnelles du polynôme $3x^3-4x^2-5x+2$, puis le factoriser.

Exercice 5 ★★

Un polynôme P a pour reste 3 dans la division par $x-1$ et pour reste 5 dans la division par $x-2$. Déterminer le reste de sa division par $(x-1)(x-2)$.

Exercice 6 ★★

Déterminer le reste de la division euclidienne de x^{100} par x^2-3x+2.

Exercice 7 ★★

Déterminer le reste de la division euclidienne de x^{2026} par x^2+x+1.

Exercice 8 ★★

Soient n, m, k des entiers naturels. Montrer que x^2+x+1 divise $x^{3n+2}+x^{3m+1}+x^{3k}$.

Exercice 9 ★★

Déterminer les réels a et b pour lesquels 1 est une racine au moins double de x^4+ax+b, puis factoriser le polynôme obtenu.

2 Coefficients entiers et interpolation

Exercice 10 ★

Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers tel que $P(2)=5$ et $P(7)=13$?

Exercice 11 ★★

Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a aucune racine entière.

Exercice 12 ★★

Déterminer le polynôme P, nul ou de degré au plus 2, tel que $P(0)=1$, $P(1)=3$ et $P(2)=7$.

Exercice 13 ★★

Soit $n\geq 1$ un entier et P un polynôme de degré au plus n tel que $P(k)=\frac{1}{k}$ pour $k=1,2,\ldots,n+1$. Calculer $P(n+2)$.

Exercice 14 ★★★

Soit P un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe trois entiers distincts a, b, c tels que $P(a)=P(b)=P(c)=2$. Montrer qu'il n'existe aucun entier n tel que $P(n)=3$.

3 Équations fonctionnelles polynomiales

Exercice 15 ★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x+1)-P(x)=2x+1$ pour tout réel x et $P(0)=0$.

Exercice 16 ★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x)^2=P(x^2)$ pour tout réel x.

Exercice 17 ★★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$ pour tout réel x.

Exercice 18 ★★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(0)=0$ et $P(x^2+1)=P(x)^2+1$ pour tout réel x.

Exercice 19 ★★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x)^2=P(x^2)+2x^2$ pour tout réel x.

Exercice 20 ★★★

Déterminer tous les polynômes P tels que $xP(x-1)=(x-3)P(x)$ pour tout réel x.

✅ Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Le reste de la division de P par $x-2$ est $P(2)$.	☐	☐
2. Un polynôme de degré 3 peut avoir 4 racines réelles distinctes.	☐	☐

Affirmation	Vrai	Faux
3. Si P est à coefficients entiers, $P(5)-P(1)$ est divisible par 4.	☐	☐