COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Polynômes : les fondations

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Vocabulaire et opérations
2. La division euclidienne
3. Racines et factorisation
4. Racines multiples et racines rationnelles
5. Polynômes à coefficients entiers
6. Polynôme passant par des points donnés
7. Équations fonctionnelles polynomiales
8. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Calculer avec les polynômes : degré, coefficient dominant, division euclidienne.
- Utiliser les racines : théorème du facteur, nombre maximal de racines, identification des coefficients.
- Exploiter les coefficients entiers : $a-b$ divise $P(a)-P(b)$, racines rationnelles.
- Résoudre une équation fonctionnelle polynomiale en comparant les degrés et en cherchant des racines.

1 Vocabulaire et opérations

◆ **Définition — polynôme, degré**

Un **polynôme à coefficients réels** est une expression $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$, où n est un entier naturel et $a_0,\ldots,a_n$ des réels. Si $a_n\neq 0$, l'entier n est le **degré** de P, noté $deg\,P$, et a_n est son **coefficient dominant** ; le polynôme est **unitaire** si $a_n=1$. Le polynôme nul n'a pas de degré. On dit que P est à coefficients **entiers** si tous les a_k sont des entiers.

◆ **Propriété — degré d'une somme et d'un produit**

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

1) $deg(PQ)=deg\,P+deg\,Q$, et le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants.

2) Si $P+Q$ n'est pas nul, $deg(P+Q)\leq max(deg\,P, deg\,Q)$, avec égalité si $deg\,P\neq deg\,Q$.

◆ **Démonstration**

1) Si $P=a_n x^n+\cdots$ et $Q=b_m x^m+\cdots$, le terme de plus haut degré du produit est $a_n b_m x^{n+m}$, non nul car $a_n b_m \neq 0$. 2) Aucun terme de $P+Q$ n'a un degré supérieur à $max(deg\,P, deg\,Q)$; si les degrés diffèrent, le terme dominant du polynôme de plus haut degré ne peut pas se simplifier.

2 La division euclidienne

◆ **Théorème — division euclidienne**

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, B non nul. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x) \text{ pour tout réel } x,$$

avec $R=0$ ou $deg\,R<deg\,B$. On appelle Q le **quotient** et R le **reste**. On dit que B **divise** A si le reste est nul.

◆ **Démonstration**

Existence, par récurrence forte sur le degré de A. Si $A=0$ ou $deg\,A<deg\,B$, on prend $Q=0$ et $R=A$.

Sinon, notons $a\,x^n$ et $b\,x^m$ les termes dominants de A et B, avec $n\geq m$. Le polynôme $A_1=A-\frac{a}{b}x^{n-m}B$ est nul ou de degré strictement inférieur à n ; par hypothèse de récurrence, $A_1=BQ_1+R$, d'où $A=B\left(Q_1+\frac{a}{b}x^{n-m}\right)+R$.

Unicité. Si $BQ+R=BQ'+R'$, alors $B(Q-Q')=R'-R$. Si $Q\neq Q'$, le membre de gauche est de degré au moins $deg\,B$, alors que le membre de droite est nul ou de degré inférieur : contradiction. Donc $Q=Q'$, puis $R=R'$.

◆ **Exemple corrigé — une division**

Effectuer la division euclidienne de $A(x)=x^4+2x^3-x+5$ par $B(x)=x^2+1$.

Solution. On retire successivement x^2B, puis $2xB$, puis $-B$:

$$x^4+2x^3-x+5=(x^2+1)(x^2+2x-1)+(-3x+6).$$

Le quotient est x^2+2x-1 et le reste $-3x+6$, de degré $1<2$.

3 Racines et factorisation

◆ **Théorème — reste de la division par x − a**

Soient P un polynôme et a un réel. Le reste de la division euclidienne de P par $x-a$ est le nombre $P(a)$. En particulier, a est une racine de P si et seulement si $x-a$ divise P.

◆ **Démonstration**

Le reste est nul ou de degré 0 : c'est une constante r. De $P(x)=(x-a)Q(x)+r$, on tire, pour $x=a$, $P(a)=r$.

◆ **Théorème — nombre de racines**

Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines réelles distinctes. Si $a_1,\dots,a_k$ sont des racines distinctes de P, alors $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$ divise P.

◆ **Démonstration**

Par récurrence sur k : si $P=(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})Q$ et si a_k est racine de P, alors $0=P(a_k)=(a_k-a_1)\cdots(a_k-a_{k-1})Q(a_k)$, et les facteurs a_k-a_i sont non nuls : donc $Q(a_k)=0$, et $x-a_k$ divise Q. Si P avait $k>n$ racines distinctes, il serait divisible par un polynôme de degré $k>n$, ce qui est impossible pour un polynôme non nul de degré n.

◆ **Corollaire — identification**

1) Un polynôme qui s'annule en une infinité de réels est le polynôme nul.

2) Si deux polynômes de degré au plus n prennent les mêmes valeurs en $n+1$ réels distincts, ils sont égaux : ils ont les mêmes coefficients.

◆ **Démonstration**

1) Un polynôme non nul a un nombre fini de racines. 2) Leur différence est nulle ou de degré au plus n, et elle a au moins $n+1$ racines : elle est nulle.

◆ **Attention**

Une égalité « pour tout réel x » entre deux polynômes permet d'**identifier les coefficients**. Une égalité vérifiée seulement en quelques valeurs ne le permet pas, sauf si le nombre de valeurs dépasse le degré.

4 Racines multiples et racines rationnelles

◆ **Définition — racine multiple**

Soit $m\geq 1$ un entier. Le réel a est une **racine d'ordre au moins** m de P si $(x-a)^m$ divise P. On dit que a est racine **double** si $(x-a)^2$ divise P mais pas $(x-a)^3$.

◆ **Méthode — tester une racine double**

Pour savoir si a est racine au moins double de P : vérifier $P(a)=0$, écrire $P(x)=(x-a)Q(x)$, puis vérifier $Q(a)=0$.

◆ Théorème — racines rationnelles

Soit $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_0$ un polynôme à coefficients entiers, avec $a_n\neq 0$ et $a_0\neq 0$. Si le rationnel $\frac{p}{q}$, écrit sous forme irréductible, est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

◆ Démonstration

On multiplie $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ par q^n : $a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_0 q^n=0$. Tous les termes sauf le dernier sont multiples de p, donc p divise $a_0 q^n$; comme p et q sont premiers entre eux, p divise a_0. De même, tous les termes sauf le premier sont multiples de q, donc q divise $a_n p^n$, puis a_n.

◆ Exemple corrigé — racines rationnelles

Factoriser $P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$.

Solution. Les racines rationnelles possibles sont $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$. On trouve $P(2)=0$, $P(-1)=0$ et $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Le polynôme est de degré 3 et de coefficient dominant 2 :

$P(x)=2(x-2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(x+1)(2x-1)$.

5 Polynômes à coefficients entiers

◆ Théorème — la propriété fondamentale

Soit P un polynôme à coefficients entiers. Pour tous entiers a et b, l'entier $a-b$ divise $P(a)-P(b)$.

◆ Démonstration

Si $P(x)=\sum c_k x^k$, alors $P(a)-P(b)=\sum c_k(a^k-b^k)$, et chaque a^k-b^k est divisible par $a-b$, d'après l'identité $a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+\cdots+b^{k-1})$ (chapitre 2).

◆ Exemple corrigé — une impossibilité

Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers tel que $P(1)=2$ et $P(3)=5$?

Solution. Non : $3-1=2$ devrait diviser $P(3)-P(1)=3$, ce qui est faux.

6 Polynôme passant par des points donnés

◆ **Théorème — interpolation**

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts et $y_0, \dots, y_n$ des réels. Il existe un unique polynôme P, nul ou de degré au plus n, tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.

◆ **Démonstration**

L'unicité vient du corollaire d'identification. Pour l'existence, on pose, pour chaque i,

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

qui vaut 1 en x_i et 0 en les autres x_j. Le polynôme $P = y_0 L_0 + \cdots + y_n L_n$ convient.

◆ **Méthode — le polynôme auxiliaire**

Lorsque l'on connaît P en plusieurs points, on étudie un **polynôme auxiliaire** qui s'annule en ces points, par exemple $Q(x) = P(x) - x$ ou $Q(x) = xP(x) - 1$; on le factorise grâce à ses racines, puis on détermine la constante restante.

◆ **Exemple corrigé — un polynôme de degré 3**

Soit P un polynôme de degré 3 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$. Calculer $P(5)$.

Solution. Le polynôme $Q(x) = P(x) - x$ est de degré 3 et s'annule en $1, 2, 3$:

$Q(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$. Avec $Q(4) = 1 = 6c$, on obtient $c = \frac{1}{6}$, puis $P(5) = 5 + \frac{1}{6} \times 4 \times 3 \times 2 = 9$.

7 Équations fonctionnelles polynomiales

◆ **Méthode — trouver tous les polynômes vérifiant une relation**

1) **Degré** : comparer les degrés des deux membres (et les coefficients dominants) pour borner ou déterminer le degré.
2) **Valeurs particulières** : remplacer x par des réels bien choisis pour trouver des racines.
3) **Factoriser** par les racines trouvées et reporter dans la relation.
4) **Infinité de points** : si $P(a_k) = b_k$ pour une infinité de réels a_k distincts, comparer à un polynôme connu qui vérifie les mêmes égalités.
5) Toujours **vérifier** les polynômes obtenus.

◆ **Exemple corrigé — une relation simple**

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(2x)=2P(x)$ pour tout réel x.

Solution. Écrivons $P(x)=\sum a_k x^k$. L'égalité $\sum a_k 2^k x^k=\sum 2a_k x^k$ pour tout réel x permet d'identifier les coefficients : $a_k(2^k-2)=0$ pour tout k. Donc $a_k=0$ pour $k\neq 1$, et $P(x)=a_1 x$. Réciproquement, ces polynômes conviennent : les solutions sont les $P(x)=cx$, c réel.

8 Fiche mémo

Notion	À retenir
Degré	$deg(PQ)=deg P+deg Q$
Division	$A=BQ+R$ avec $R=0$ ou $deg R<deg B$
Reste par $x-a$	c'est $P(a)$; a racine $\Leftrightarrow$ $x-a$ divise P
Racines	degré n : au plus n racines ; infinité de racines : polynôme nul
Racine double	$P=(x-a)Q$ avec $Q(a)=0$
Racine $\frac{p}{q}$	p divise a_0, q divise a_n
Coefficients entiers	$a-b$ divise $P(a)-P(b)$
Interpolation	$n+1$ points distincts déterminent un polynôme de degré au plus n