EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 — Récurrence et suites

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Les suites considérées sont des suites de nombres réels indexées par les entiers naturels ; n désigne un entier naturel.

1 Raisonnement par récurrence

Exercice 1 ★

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Exercice 2 ★

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n+1$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^n > n^2$.

Exercice 3 ★★

Montrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $9^n - 8n - 1$ est divisible par 64.

Exercice 4 ★★

Montrer que tout entier $n \geq 8$ peut s'écrire $n = 3a+5b$, où a et b sont des entiers naturels.

Exercice 5 ★★

La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Exercice 6 ★★

Avec les notations de l'exercice 5, on pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1) Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $F_n \leq \varphi^{n-1}$.

2 Suites usuelles

Exercice 7 ★

Une suite géométrique (u_n), de raison réelle, vérifie $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$. Déterminer sa raison, son premier terme u_0, puis la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice 8 ★

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$ pour tout entier $n\geq 0$.

Exercice 9 ★★

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0=1$, $u_1=4$ et $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$ pour tout entier $n\geq 0$.

Exercice 10 ★★

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0=u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n$ pour tout entier $n\geq 0$. En déduire que u_n est un entier impair pour tout n.

Exercice 11 ★★

Pour tout entier $n\geq 1$, on note d_n le nombre de façons de recouvrir un rectangle de 2 cases sur n cases par des dominos de 2 cases sur 1. Montrer que $d_{n+2}=d_{n+1}+d_n$ pour tout $n\geq 1$, puis calculer d_{10}.

3 Suites définies par une fonction

Exercice 12 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$ pour tout entier $n\geq 0$.

1) Montrer que, pour tout n, u_n est bien défini et $0\leq u_n<4$.

2) Montrer que la suite est croissante.

3) Montrer que, pour tout n, $4-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(4-u_n)$, puis que $4-u_n\leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 13 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{u_n^2+4}{2u_n}$ pour tout entier $n\geq 0$. Montrer que, pour tout n, u_n est bien défini et $u_n>2$, puis que la suite est décroissante.

Exercice 14 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n}$ pour tout entier $n\geq 0$. Montrer que $u_n>0$ pour tout n, puis exprimer u_n en fonction de n.

4 Problèmes d'olympiades

Exercice 15 ★★★

Soit (a_n) la suite définie par $a_0=3$ et $a_{n+1}=a_n^2-2$ pour tout entier $n\geq 0$.

1) Montrer que tous les a_n sont des entiers impairs.

2) Montrer que, pour tous entiers $n\geq 0$ et $k\geq 2$, l'entier $a_{n+k}-2$ est un multiple de a_n.

3) En déduire que deux termes distincts de la suite n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Exercice 16 ★★★

Soit (v_n) la suite définie par $v_0=v_1=1$ et $v_{n+1}=\dfrac{v_n^2+1}{v_{n-1}}$ pour tout entier $n\geq 1$.

1) Calculer v_2, v_3, v_4, v_5.

2) Montrer que, pour tout n, v_n est bien défini et strictement positif, et que $v_{n+1}=3v_n-v_{n-1}$ pour tout $n\geq 1$.

3) En déduire que tous les v_n sont des entiers.

Exercice 17 ★★★

Avec les notations de l'exercice 5, montrer que tout entier $n\geq 1$ est la somme de termes **distincts** de la suite $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, ... Par exemple, $20=13+5+2$.

Exercice 18 ★★★

Soit x_1 un réel strictement positif et $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$ pour tout entier $n\geq 1$.

1) Montrer que x_n est bien défini et strictement positif pour tout $n\geq 1$, et que $x_n\geq\sqrt{2}$ pour tout $n\geq 2$.

2) Montrer que, pour tout $n\geq 2$, $0\leq x_{n+1}-\sqrt{2}\leq\dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 19 ★★★

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1=2$ et $u_{n+1}=u_n^2-u_n+1$ pour tout entier $n\geq 1$.

1) Montrer que $u_n\geq 2$ pour tout $n\geq 1$, et que $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$.

2) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, $\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}=1-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$, et que cette somme est strictement inférieure à 1.

Exercice 20 ★★★

Déterminer toutes les suites (u_n) d'entiers strictement positifs telles que, pour tout entier $n\geq 0$, $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}+u_n}{2}$.

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Une propriété héréditaire est vraie pour tout entier naturel.	☐	☐
2. Si $u_{n+1}=3u_n$ pour tout n, alors $u_n=3^n u_0$ pour tout n.	☐	☐
3. La suite définie par $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ est arithmétique.	☐	☐
4. Si $u_{n+1}=au_n+b$ avec $a=1$, la suite est géométrique.	☐	☐