COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 — Récurrence et suites

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Le raisonnement par récurrence
2. Variantes : récurrence forte, récurrence double
3. Suites arithmétiques et géométriques
4. Suites arithmético-géométriques
5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
6. Suites définies par une relation de la forme u(n+1) = f(u(n))
7. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Rédiger une démonstration par récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.
- Choisir la bonne variante : récurrence simple, forte ou double.
- Calculer le terme général des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Étudier une suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$: encadrement et sens de variation.

1 Le raisonnement par récurrence

Dans tout le chapitre, une **suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ est une liste infinie de réels $u_0, u_1, u_2, \ldots$ indexée par les entiers naturels. On la définit soit **explicitement** ($u_n=2^n$), soit **par récurrence** ($u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n$ pour tout $n\geq 0$).

◆ **Théorème — principe de récurrence**

Soit n_0 un entier naturel et, pour tout entier $n\geq n_0$, une propriété $P(n)$. On suppose que :

1) initialisation : $P(n_0)$ est vraie ;

2) hérédité : pour tout entier $n\geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq n_0$.

◆ **Démonstration**

Supposons qu'il existe des entiers $n\geq n_0$ pour lesquels $P(n)$ est fausse, et soit m le plus petit d'entre eux (tout ensemble non vide d'entiers naturels a un plus petit élément). On a $m\neq n_0$ par l'initialisation, donc $m-1\geq n_0$, et $P(m-1)$ est vraie par minimalité de m. L'hérédité donne alors $P(m)$: contradiction.

◆ Méthode — modèle de rédaction

1) Énoncer clairement la propriété $P(n)$ et l'entier de départ n_0.

2) Initialisation : vérifier $P(n_0)$.

3) Hérédité : « Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons $P(n+1)$. » Utiliser explicitement l'hypothèse de récurrence.

4) Conclusion : « Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

◆ Exemple corrigé — l'inégalité de Bernoulli

Soit x un réel tel que $x \geq -1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Solution. Notons $P(n)$ l'inégalité. *Initialisation :* pour $n=0$, les deux membres valent 1. *Hérédité :* soit $n \geq 0$ tel que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Comme $1+x \geq 0$, on peut multiplier par $1+x$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout entier naturel n.

◆ Attention

L'hérédité seule ne suffit pas : la propriété « 3 divise 10^n+1 » est héréditaire (si $10^n+1=3k$, alors $10^{n+1}+1=10\times 3k-9$), mais elle est fausse pour tout n : 10^n+1 est toujours de reste 2 dans la division par 3. L'initialisation est indispensable.

2 Variantes : récurrence forte, récurrence double

◆ Théorème — récurrence forte

Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. On suppose que $P(n_0)$ est vraie et que, pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$ sont **toutes** vraies, alors $P(n+1)$ est vraie. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

◆ Démonstration

On applique la récurrence simple à la propriété $Q(n)$: « $P(n_0), \ldots, P(n)$ sont toutes vraies ».

◆ Théorème — récurrence double

Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ et $P(n+1)$ entraînent $P(n+2)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

◆ Démonstration

On applique la récurrence simple à la propriété « $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies ».

◆ **Exemple corrigé — récurrence forte**

Montrer que tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.

Solution. L'entier 2 est premier. Soit $n \geq 2$ tel que tous les entiers de 2 à n soient des produits de nombres premiers. Si $n+1$ est premier, c'est fini. Sinon, $n+1 = a\,b$ avec $2 \leq a \leq n$ et $2 \leq b \leq n$; par hypothèse, a et b sont des produits de nombres premiers, donc $n+1$ aussi.

3 Suites arithmétiques et géométriques

◆ **Définition — suites arithmétiques et géométriques**

Soient r et q des réels. La suite (u_n) est **arithmétique de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geq 0$; elle est **géométrique de raison q si $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout $n \geq 0$.

◆ **Théorème — terme général et sommes**

Pour tout entier naturel n :

1) si (u_n) est arithmétique de raison r : $u_n = u_0 + n r$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$;

2) si (u_n) est géométrique de raison q : $u_n = u_0 q^n$ et, si $q \neq 1$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

◆ **Démonstration**

Les formules du terme général se démontrent par récurrence. Pour la somme arithmétique, on écrit la somme dans les deux sens : $u_k + u_{n-k} = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$ pour tout k, et il y a $n+1$ termes. Pour la somme géométrique, c'est le chapitre 3.

4 Suites arithmético-géométriques

◆ **Théorème — suite arithmético-géométrique**

Soient $a \neq 1$ et b des réels, et (u_n) la suite telle que $u_{n+1} = a\,u_n + b$ pour tout $n \geq 0$. Soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ l'unique réel tel que $\ell = a\,\ell + b$. Alors, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).$$

◆ **Démonstration**

En soustrayant $\ell = a\,\ell + b$ de $u_{n+1} = a\,u_n + b$, on obtient $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$: la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a, donc $u_n - \ell = a^n (u_0 - \ell)$.

◆ **Exemple corrigé — une suite arithmético-géométrique**

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n+3$ pour tout entier $n\geq 0$.

Solution. Le réel ℓ vérifie $\ell=2\ell+3$, donc $\ell=-3$. Alors $u_n+3=2^n(u_0+3)=4\times 2^n$, soit $u_n=2^{n+2}-3$.
Vérification : $u_1=5=2\times 1+3$.

5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

◆ **Théorème — terme général**

Soient p et q des réels, $q\neq 0$, et (u_n) une suite telle que $u_{n+2}=pu_{n+1}+qu_n$ pour tout $n\geq 0$. On appelle **équation caractéristique** l'équation $r^2=pr+q$.

1) Si elle a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, il existe des réels A et B tels que $u_n=Ar_1^n+Br_2^n$ pour tout $n\geq 0$.
2) Si elle a une solution double r, il existe des réels A et B tels que $u_n=(A+Bn)r^n$ pour tout $n\geq 0$.

Les constantes A et B se calculent à partir de u_0 et u_1.

◆ **Démonstration**

1) La suite $w_n=r_1^n$ vérifie la relation, car $r_1^{n+2}=r_1^n\cdot r_1^2=r_1^n(pr_1+q)$; de même pour r_2^n, puis pour toute suite $Ar_1^n+Br_2^n$. On choisit A et B tels que $A+B=u_0$ et $Ar_1+Br_2=u_1$: ce système a une unique solution car son déterminant r_2-r_1 est non nul. Les suites (u_n) et $(Ar_1^n+Br_2^n)$ ont alors les mêmes deux premiers termes et vérifient la même relation : par récurrence double, elles sont égales.
2) Si r est racine double, alors $p=2r$ et $q=-r^2$, avec $r\neq 0$ car $q\neq 0$. La suite nr^n vérifie la relation : $p(n+1)r^{n+1}+qnr^n=r^n\left[2r^2(n+1)-r^2n\right]=(n+2)r^{n+2}$. On conclut comme en 1), avec le système $A=u_0$ et $(A+B)r=u_1$.

◆ **Exemple corrigé — racines distinctes**

Déterminer la suite telle que $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ pour tout $n\geq 0$.

Solution. L'équation $r^2=5r-6$ a pour solutions 2 et 3. Donc $u_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n$, avec $A+B=0$ et $2A+3B=1$: $B=1$, $A=-1$. Ainsi $u_n=3^n-2^n$.

6 Suites définies par une relation de la forme u(n+1) = f(u(n))

◆ **Méthode — encadrer et étudier les variations**

Soit I un intervalle et f une fonction telle que $f(x)\in I$ pour tout $x\in I$. Si $u_0\in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, alors :

- par récurrence, $u_n\in I$ pour tout n : la suite est **bien définie** et **encadrée** ;
- si f est croissante sur I, la suite est **monotone** : par récurrence, $u_1\geq u_0$ entraîne $u_{n+1}\geq u_n$ pour tout n, et $u_1\leq u_0$ entraîne $u_{n+1}\leq u_n$ pour tout n ;
- pour obtenir une formule, chercher un **changement de suite** $v_n=g(u_n)$ plus simple (par exemple $v_n=\frac{1}{u_n}$).

◆ **Exemple corrigé — un changement de suite**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout $n\geq 0$. Montrer que $u_n>0$ pour tout n, puis exprimer u_n en fonction de n.

Solution. Par récurrence : $u_0=2>0$, et si $u_n>0$, alors $1+u_n>0$ et $u_{n+1}>0$. On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$: $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n}=v_n+1$. La suite (v_n) est arithmétique de raison 1, donc $v_n=\dfrac{1}{2}+n$ et $u_n=\dfrac{2}{2n+1}$.

7 Fiche mémo

Notion	À retenir
Récurrence	initialisation + hérédité ; ne jamais oublier l'initialisation
Variantes	forte : on suppose tous les rangs précédents ; double : deux rangs initiaux
Arithmétique	$u_n=u_0+nr$; $u_0+\cdots+u_n=\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$
Géométrique	$u_n=u_0q^n$; $u_0+\cdots+u_n=u_0\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ si $q\neq 1$
Arithmético-géométrique	$u_n=\ell+a^n(u_0-\ell)$, avec $\ell=\dfrac{b}{1-a}$
Ordre 2	$r^2=pr+q$; $u_n=Ar_1^n+Br_2^n$ ou $(A+Bn)r^n$
Relation $u_{n+1}=f(u_n)$	intervalle stable, f croissante : suite monotone