EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Équations, systèmes et second degré

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Sauf mention contraire, les inconnues sont des nombres réels et l'on demande l'ensemble de toutes les solutions.

1 Systèmes linéaires et trinômes

Exercice 1 ★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$2x+3y=7,\ 5x-2y=8.$$

Exercice 2 ★

Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut 7 et le produit 12.

Exercice 3 ★

Résoudre l'équation $\sqrt{2x+3}=x$, d'inconnue réelle x.

Exercice 4 ★★

Soit m un réel. Selon la valeur de m, résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$mx+y=1,\ x+my=1.$$

Exercice 5 ★★

Déterminer les réels m pour lesquels l'équation $x^2+(m-1)x+m=0$, d'inconnue réelle x, a deux solutions réelles distinctes de signes contraires.

Exercice 6 ★★

Déterminer les réels m pour lesquels les équations $x^2+mx+1=0$ et $x^2+x+m=0$, d'inconnue réelle x, ont au moins une solution réelle commune.

2 Systèmes symétriques et équations particulières

Exercice 7 ★★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$x+y=4,\ x^3+y^3=28.$$

Exercice 8 ★★

Soient x et y des réels tels que $x+y=2$ et $x^4+y^4=34$. Déterminer xy.

Exercice 9 ★★

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0.$$

Exercice 10 ★★

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0.$$

Exercice 11 ★★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y, z :

$$x+y+z=6,\,xy+yz+zx=11,\,xyz=6.$$

3 Radicaux et partie entière

Exercice 12 ★★

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$$

Exercice 13 ★★

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle $x\geq 1$:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Exercice 14 ★★

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière et $\{x\}=x-\lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire du réel x. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1) $\lfloor x \rfloor+\{x\}^2=\dfrac{9}{4}$;

2) $\lfloor x \rfloor\times\{x\}=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 15 ★★★

Résoudre l'équation $x^2-5\lfloor x \rfloor+4=0$, d'inconnue réelle x.

4 Problèmes d'olympiades

Exercice 16 ★★★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles positives ou nulles x, y, z :

$$2x^2=y+1,\,2y^2=z+1,\,2z^2=x+1.$$

Exercice 17 ★★★

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles x, y, z :

$$x+y+z=1,\,x^2+y^2+z^2=1,\,x^3+y^3+z^3=1.$$

Exercice 18 ★★★

Soit a un réel. Résoudre l'équation $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, d'inconnue réelle x.

Exercice 19 ★★★

Déterminer la plus petite valeur de $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+13$ lorsque x et y décrivent l'ensemble des réels, et les couples (x,y) pour lesquels elle est atteinte.

Exercice 20 ★★★ *OIM 1963, problème 1*

Déterminer, en fonction du paramètre réel p, toutes les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

✅ Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Les équations $\sqrt{x}=x-2$ et $x=(x-2)^2$ ont les mêmes solutions réelles.	☐	☐
2. Il existe deux réels de somme 2 et de produit 3.	☐	☐
3. Pour tout réel x : $\lfloor x+3 \rfloor=\lfloor x \rfloor+3$.	☐	☐
4. Pour tous réels x et y : $\lfloor x+y \rfloor=\lfloor x \rfloor+\lfloor y \rfloor$.	☐	☐