COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Équations, systèmes et second degré

Ali AKIR — Formateur olympique

Sommaire

1. Équations équivalentes et systèmes linéaires
2. Le trinôme du second degré
3. Somme et produit des racines
4. Systèmes symétriques et équations réciproques
5. Équations avec radicaux
6. Partie entière
7. Systèmes cycliques : l'argument du maximum
8. Fiche mémo

L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre

- Raisonner par **équivalences** et savoir quand on ne raisonne que par **implications** (il faut alors vérifier les solutions).
- Maîtriser le trinôme : forme canonique, discriminant, signe, somme et produit des racines.
- Résoudre un système symétrique avec les inconnues $s=x+y$ et $p=xy$.
- Résoudre une équation avec radicaux en contrôlant les conditions d'existence et de signe.
- Manipuler la partie entière et la partie fractionnaire.

1 Équations équivalentes et systèmes linéaires

Définition — équations équivalentes

Deux équations d'inconnue réelle x sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions. On passe d'une équation à une équation équivalente en ajoutant un même réel aux deux membres, ou en les multipliant par un même réel **non nul**.

Attention

Élever au carré, multiplier par une expression qui peut s'annuler, ou simplifier par une telle expression ne donnent en général qu'une **implication**. Par exemple, $x=1$ implique $x^2=1$, mais $x^2=1$ admet aussi la solution -1. Après une implication, il faut **vérifier** chaque solution trouvée.

◆ Théorème — système linéaire de deux équations

Soient a, b, c, a', b', c' des réels. Le système

$$a x+b y=c, a' x+b' y=c'$$

d'inconnues réelles x et y admet une unique solution si et seulement si $D=a b'-a' b \neq 0$. Elle est alors donnée par

$$x=\frac{c b'-c' b}{D}, y=\frac{a c'-a' c}{D}.$$

◆ Démonstration

On multiplie la première équation par b', la seconde par b, et l'on soustrait : $D x=c b'-c' b$. De même, en éliminant x : $D y=a c'-a' c$. Si $D \neq 0$, ces deux égalités déterminent x et y, et l'on vérifie qu'ils conviennent. Si $D=0$, les deux premiers membres sont proportionnels : le système a soit aucune solution, soit une infinité.

◆ Méthode — résoudre un système plus grand

- **Élimination** : combiner les équations pour supprimer une inconnue à la fois.
- **Sommer** toutes les équations lorsqu'elles ont une structure symétrique ou cyclique : on obtient souvent $x+y+z$.
- Chercher les **différences** de deux équations, qui se factorisent souvent.

2 Le trinôme du second degré

◆ Théorème — racines d'un trinôme

Soient $a \neq 0, b, c$ des réels et $\Delta=b^2-4 a c$. L'équation $a x^2+b x+c=0$, d'inconnue réelle x :

1) n'a aucune solution si $\Delta<0$;

2) a une unique solution $x_0=-\frac{b}{2 a}$ si $\Delta=0$;

3) a deux solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$ si $\Delta>0$.

◆ Démonstration

La forme canonique (chapitre 2) donne $a x^2+b x+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2 a}\right)^2-\frac{\Delta}{4 a^2}\right]$. Comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $\left(x+\frac{b}{2 a}\right)^2=\frac{\Delta}{4 a^2}$. Un carré de réel est positif ou nul : il n'y a pas de solution si $\Delta<0$; sinon, $x+\frac{b}{2 a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2 a}$.

◆ Théorème — signe et extremum

Soient $a\neq 0$, b, c des réels. Le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ est du signe de a pour tout réel x, sauf entre ses racines lorsque $\Delta>0$ (où il est du signe contraire de a). Si $a>0$, sa plus petite valeur est $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$; si $a<0$, c'est sa plus grande valeur.

◆ Démonstration

Si $\Delta>0$, on a $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, et le produit $(x-x_1)(x-x_2)$ est strictement négatif exactement lorsque x est strictement entre x_1 et x_2. Si $\Delta\leq 0$, la forme canonique montre que le crochet est positif ou nul. L'extremum se lit sur la forme canonique : le carré est minimal, égal à 0, pour $x=-\dfrac{b}{2a}$.

◆ Exemple corrigé — un minimum

Déterminer la plus petite valeur de $2x^2-8x+3$ lorsque x décrit l'ensemble des réels.

Solution. $2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5\geq -5$, avec égalité pour $x=2$: la plus petite valeur est -5.

3 Somme et produit des racines

◆ Théorème — relations de Viète pour le second degré

Soient $a\neq 0$, b, c des réels tels que $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, et x_1, x_2 les racines de ax^2+bx+c (confondues si $\Delta=0$). Alors

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Réciproquement, deux réels de somme s et de produit p sont les racines du trinôme t^2-st+p ; de tels réels existent si et seulement si $s^2-4p\geq 0$.

◆ Démonstration

On a $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]$; on identifie les coefficients.

Réciproquement, si $x+y=s$ et $xy=p$, alors $(t-x)(t-y)=t^2-st+p$; ce trinôme a des racines réelles si et seulement si son discriminant s^2-4p est positif ou nul.

◆ Méthode — étudier le signe des racines sans les calculer

Pour un trinôme de discriminant $\Delta\geq 0$, de somme des racines S et de produit P :

- les racines sont de signes contraires si et seulement si $P<0$;
- elles sont toutes deux strictement positives si et seulement si $P>0$ et $S>0$;
- elles sont toutes deux strictement négatives si et seulement si $P>0$ et $S<0$.

◆ **Exemple corrigé — racines positives**

Déterminer les réels m pour lesquels l'équation $x^2-2mx+m+2=0$ a deux solutions réelles, éventuellement confondues, strictement positives.

Solution. Il faut $\Delta=4(m^2-m-2)=4(m+1)(m-2)\geq 0$, soit $m\leq -1$ ou $m\geq 2$. Il faut aussi $P=m+2>0$ et $S=2m>0$, soit $m>0$. Finalement : $m\geq 2$.

4 Systèmes symétriques et équations réciproques

◆ **Méthode — système symétrique en x et y**

Un système qui ne change pas quand on échange x et y s'exprime à l'aide de $s=x+y$ et $p=xy$, grâce à $x^2+y^2=s^2-2p$ et $x^3+y^3=s^3-3ps$. On résout en s et p, puis x et y sont les racines de t^2-st+p : on ne garde que les couples tels que $s^2-4p\geq 0$.

◆ **Exemple corrigé — un système symétrique**

Résoudre dans l'ensemble des couples de réels le système $x+y=5$, $x^2+y^2=13$.

Solution. $s=5$ et $s^2-2p=13$, donc $p=6$. Les réels x et y sont les racines de $t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$: les solutions sont $(2,3)$ et $(3,2)$.

◆ **Méthode — équation réciproque de degré 4**

Une équation $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ avec $a\neq 0$ n'a pas la solution 0. On divise par x^2 et l'on pose $t=x+\dfrac{1}{x}$, en utilisant $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$: on obtient $a(t^2-2)+bt+c=0$. On cherche ensuite x tel que $x+\dfrac{1}{x}=t$, c'est-à-dire $x^2-tx+1=0$, qui a des solutions réelles si et seulement si $|t|\geq 2$.

5 Équations avec radicaux

◆ **Propriété — élever au carré sans perdre d'information**

Pour tous réels A et B :

$$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \left(A=B^2 \text{ et } B\geq 0\right).$$

◆ **Démonstration**

Si $\sqrt{A}=B$, alors $A\geq 0$, $B\geq 0$ et $A=B^2$. Réciproquement, si $A=B^2$ et $B\geq 0$, alors $A\geq 0$ et $\sqrt{A}$ est le réel positif dont le carré est A : c'est B.

◆ **Exemple corrigé — une équation avec radical**

Résoudre l'équation $\sqrt{x+5}=x-1$, d'inconnue réelle x.

Solution. Elle équivaut à $x+5=(x-1)^2$ et $x\geq 1$, soit $x^2-3x-4=0$ et $x\geq 1$. Les racines du trinôme sont -1 et 4 : seule $x=4$ convient.

◆ **Méthode — autres techniques**

- **Changement d'inconnue** : poser $t=\sqrt{\ldots}$, avec $t\geq 0$.
- **Majorer et minorer** les deux membres : si l'un est toujours au plus M et l'autre au moins M, il y a égalité dans les deux.
- Reconnaître un carré sous un radical : $\sqrt{(u-v)^2}=|u-v|$.

6 Partie entière

◆ **Définition — partie entière, partie fractionnaire**

Pour tout réel x, la **partie entière** $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x ; c'est l'unique entier n tel que $n\leq x<n+1$. La **partie fractionnaire** est $\{x\}=x-\lfloor x \rfloor$; elle vérifie $0\leq\{x\}<1$.

◆ **Propriété — règles de calcul**

Pour tout réel x et tout entier m :

1) $\lfloor x+m \rfloor=\lfloor x \rfloor+m$;

2) $x-1<\lfloor x \rfloor\leq x$;

3) $\lfloor x \rfloor=m \Leftrightarrow m\leq x<m+1$.

◆ **Démonstration**

3) est la définition. 2) en découle. Pour 1), si $n=\lfloor x \rfloor$, alors $n+m\leq x+m<n+m+1$, et $n+m$ est un entier : par 3), $\lfloor x+m \rfloor=n+m$.

◆ **Méthode — résoudre une équation avec partie entière**

Poser $n=\lfloor x \rfloor$ (entier) et $f=\{x\}$ avec $0\leq f<1$, puis écrire $x=n+f$. On obtient une équation en n et f, que l'on résout en exploitant l'encadrement de f et le fait que n est entier.

7 Systèmes cycliques : l'argument du maximum

◆ **Méthode — supposer qu'une inconnue est la plus grande**

Pour un système cyclique $x\to y\to z\to x$, faire des hypothèses d'ordre : supposer par exemple que x est la plus grande des inconnues, puis comparer les équations. Lorsque les fonctions en jeu sont croissantes, un ordre entre deux inconnues se transmet de proche en proche, et l'on aboutit souvent à $x=y=z$.

◆ **Exemple corrigé — un système cyclique**

Résoudre le système $x^3=y$, $y^3=z$, $z^3=x$, d'inconnues réelles.

Solution. La fonction cube est strictement croissante sur l'ensemble des réels. Si $x<y$, alors $x^3<y^3$, soit $y<z$, puis $y^3<z^3$, soit $z<x$: on obtiendrait $x<y<z<x$, impossible. De même $x>y$ est impossible ; donc $x=y$, puis $y=z$. L'équation $x^3=x$ donne $x\in\{-1,0,1\}$: les solutions sont $(-1,-1,-1)$, $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$.

8 Fiche mémo

Notion	À retenir
Équivalence	élever au carré ou simplifier par une expression : vérifier les solutions
Système 2 × 2	unique solution si et seulement si $a\,b'-a'\,b\neq 0$
Trinôme	$\Delta=b^2-4\,a\,c$; racines $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\,a}$
Extremum	$f\left(-\dfrac{b}{2\,a}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\,a}$
Viète	$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1\,x_2=\dfrac{c}{a}$
Somme et produit	x, y réels existent si et seulement si $s^2\geq 4\,p$
Réciproque	$t=x+\dfrac{1}{x}$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$
Radical	$\sqrt{A}=B\Leftrightarrow A=B^2$ et $B\geq 0$
Partie entière	$\lfloor x\rfloor=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1$; $0\leq\{x\}<1$