EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Sommes, produits et télescopage

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Dans tous les énoncés, n désigne un entier naturel non nul, sauf mention contraire. On demande une expression simplifiée en fonction de n.

1 Sommes et produits télescopiques

Exercice 1 ★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Exercice 2 ★

Calculer, pour n entier tel que $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 3 ★

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k\,!$.

Exercice 4 ★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

Exercice 5 ★★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}.$$

Exercice 6 ★★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 7 ★★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Exercice 8 ★★

Soit x un réel différent de 1. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

2 Sommes de référence

Exercice 9 ★

Calculer la somme des carrés des n premiers entiers impairs : $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$.

Exercice 10 ★★

1) Vérifier que, pour tout entier $k\geq 1$, $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$.

2) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ par télescopage, puis retrouver la somme des carrés.

Exercice 11 ★★

Pour tout entier $k\geq 1$, on note $T_k=1+2+\cdots+k$. Calculer, pour n entier tel que $n\geq 2$:

$$\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}.$$

Exercice 12 ★★

1) Vérifier que, pour tout entier $k\geq 1$, $(k-1)2^{k+1}-(k-2)2^k=k\cdot 2^k$.

2) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$.

Exercice 13 ★★

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Exercice 14 ★★

La suite de Fibonacci est définie par $F_1=F_2=1$ et $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ pour tout entier $k\geq 1$. Montrer que :

1) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$;

2) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$.

3 Majorations et problèmes

Exercice 15 ★★

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 16 ★★★

1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$.

2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$.

Exercice 17 ★★★

1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2$.

Exercice 18 ★★★

Montrer, par télescopage et sans utiliser la formule de la somme des cubes, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Exercice 19 ★★★

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$.

1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 \leq \frac{3k-2}{3k+1}$.

2) En déduire que $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Exercice 20 ★★★

Calculer, pour n entier tel que $n \geq 2$:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

✅ Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$: $\sum a_k b_k = \sum a_k \times \sum b_k$.	☐	☐

Affirmation	Vrai	Faux
2. Pour tous réels $u_1, \ldots, u_{n+1}$: $\sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) = u_{n+1} - u_1$.	☐	☐
3. Pour tout entier $n \geq 1$: $1+2+\cdots+n = \frac{n^2}{2}$.	☐	☐
4. Pour tout réel $q \neq 1$: $1+q+\cdots+q^{10} = \frac{q^{11}-1}{q-1}$.	☐	☐