COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Sommes, produits et télescopage

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Les symboles somme et produit
2. Le principe du télescopage
3. Les sommes de référence
4. Fabriquer un télescopage
5. Majorer une somme par télescopage
6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Lire et manipuler les notations $\sum$ et $\prod$: décalage d'indice, découpage, linéarité.
- Reconnaître une somme télescopique et la calculer.
- Connaître les sommes de référence : entiers, carrés, cubes, progression géométrique.
- Transformer un terme en différence de deux termes consécutifs : fractions, racines carrées, factorielles.
- Majorer une somme infinie en apparence par une somme télescopique.

1 Les symboles somme et produit

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels, sauf mention contraire.

◆ **Définition — symboles somme et produit**

On note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ et } \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

La lettre k est l'**indice** ; elle est muette : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Pour un entier $n \geq 1$, on note $n\,! = \prod_{k=1}^{n} k$ (factorielle n), et l'on convient que $0\,! = 1$.

◆ Propriété — règles de calcul

Pour tous réels λ, μ et tous entiers $1 \le m < n$:

1) linéarité : $\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda a_k + \mu b_k\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$;

2) découpage : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$;

3) décalage d'indice : $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} a_j$ (on pose $j = k+1$) ;

4) somme d'une constante : $\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$;

5) pour le produit : $\prod_{k=1}^{n} \left(a_k b_k\right) = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k$.

◆ Attention

En général, $\sum a_k b_k \neq \sum a_k \times \sum b_k$ et $\prod \left(a_k + b_k\right) \neq \prod a_k + \prod b_k$. Par exemple, pour $n = 2$ et $a_k = b_k = 1$: $\sum a_k b_k = 2$, alors que $\sum a_k \times \sum b_k = 4$.

2 Le principe du télescopage

◆ Théorème — somme télescopique

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) = u_{n+1} - u_1.$$

◆ Démonstration

Par linéarité et décalage d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{j=2}^{n+1} u_j - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} - u_1,$$

car les termes $u_2, \ldots, u_n$ figurent dans les deux sommes et se simplifient.

◆ Théorème — produit télescopique

Soient $u_1, \ldots, u_{n+1}$ des réels non nuls. Alors

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1}.$$

◆ **Démonstration**

Dans le produit $\frac{u_2}{u_1}\times\frac{u_3}{u_2}\times\cdots\times\frac{u_{n+1}}{u_n}$, chaque numérateur u_j, pour $2\le j\le n$, se simplifie avec le dénominateur du facteur suivant.

◆ **Exemple corrigé — une somme de fractions**

Calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ pour n entier, $n\ge 1$.

Solution. Pour tout entier $k\ge 1$, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Avec $u_k=-\frac{1}{k}$, le terme vaut $u_{k+1}-u_k$, et

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

◆ **Exemple corrigé — un produit**

Calculer $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ pour n entier, $n\ge 2$.

Solution. $1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$, donc $P_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$.

3 Les sommes de référence

◆ **Théorème — somme des premiers entiers**

Pour tout entier $n\ge 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

◆ **Démonstration**

Notons S cette somme et écrivons-la dans les deux sens : $S=1+2+\cdots+n$ et $S=n+(n-1)+\cdots+1$. En additionnant terme à terme, chaque paire vaut $n+1$, et il y a n paires : $2S=n(n+1)$.

◆ **Théorème — sommes des carrés et des cubes**

Pour tout entier $n\ge 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad\text{et}\quad\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

◆ **Démonstration**

On a $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$. En sommant pour $k=1,\dots,n$, le télescopage donne

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

On isole la somme des carrés :

$$3\sum k^2=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}=(n+1)\left(n^2+2n-\frac{3n}{2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Pour les cubes, posons $T_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ et $T_0=0$. Alors $T_k^2-T_{k-1}^2=\dfrac{k^2}{4}\left[(k+1)^2-(k-1)^2\right]=\dfrac{k^2}{4}\times 4k=k^3$, et le télescopage donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=T_n^2-T_0^2=T_n^2$.

◆ **Théorème — somme géométrique**

Pour tout réel $q\neq 1$ et tout entier $n\geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Pour $q=1$, la somme vaut $n+1$.

◆ **Démonstration**

On calcule $(q-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=0}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right)=q^{n+1}-1$ par télescopage, puis on divise par $q-1\neq 0$.

◆ **Exemple corrigé — utiliser les sommes de référence**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ pour n entier, $n\geq 1$.

Solution. Par linéarité,

$$\sum k(k+1)=\sum k^2+\sum k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4 Fabriquer un télescopage

◆ **Méthode — écrire le terme comme une différence**

- **Fractions** : décomposer, par exemple $\frac{1}{k(k+p)}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+p}\right)$ pour un entier $p\geq 1$.
- **Racines carrées** : multiplier par la quantité conjuguée, $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.
- **Factorielles** : utiliser $k\cdot k\,!=(k+1)\,!-k\,!$.
- **Produits** : factoriser chaque facteur, par exemple $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$, et séparer en deux produits télescopiques.
- Lorsque le terme u_k n'est pas visible, **deviner** u_k en calculant les premières sommes, puis vérifier que $u_{k+1}-u_k$ est bien le terme général.

◆ **Propriété — trois décompositions utiles**

Pour tout entier $k\geq 1$:

1) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$;

2) $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$;

3) $k\cdot k\,!=(k+1)\,!-k\,!$.

◆ **Démonstration**

1) On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

2) $\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=(k+1)-k=1$.

3) $(k+1)\,!-k\,!=k\,!\,(k+1-1)=k\cdot k\,!$.

◆ **Exemple corrigé — racines carrées**

Calculer $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Solution. Par la décomposition 2), la somme vaut $\sum_{k=1}^{99}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$.

5 Majorer une somme par télescopage

◆ **Méthode — comparer à un terme télescopique**

Pour montrer qu'une somme $\sum a_k$ reste inférieure à une constante, on cherche des réels u_k tels que $a_k\leq u_k-u_{k+1}$ pour tout k, avec u_k positifs. On obtient alors $\sum_{k=1}^{n}a_k\leq u_1-u_{n+1}<u_1$.

◆ **Exemple corrigé — l'inverse des carrés**

Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$.

Solution. Pour $k\geq 2$, on a $k^2>k(k-1)$, donc $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Pour $n\geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1+1-\frac{1}{n}<2.$$

Pour $n=1$, la somme vaut $1<2$.

6 Fiche mémo

Notion	À retenir
Télescopage	$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_1$; $\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_1}$
Entiers	$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
Carrés	$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Cubes	$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
Géométrique	$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q\neq 1$
Fractions	$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$
Racines	$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$
Factorielles	$k\cdot k!=(k+1)!-k!$
Majoration	$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ pour $k\geq 2$