EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 2 — Identités et factorisation

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Chaque énoncé précise l'ensemble auquel appartiennent les variables.

1 Identités et factorisations directes

Exercice 1 ★

Factoriser complètement, pour x réel, en produit de polynômes à coefficients réels :

1) x^4-5x^2+4 ;

2) x^3-3x+2 ;

3) x^4+x^2+1.

Exercice 2 ★

Factoriser, pour x, y, a, b, c réels :

1) $xy-2x+3y-6$;

2) $a^2-b^2-c^2+2bc$;

3) $x^4+x^2y^2+y^4$.

Exercice 3 ★

Soient x et y des réels tels que $x+y=3$ et $x^2+y^2=5$. Calculer xy, puis x^3+y^3, puis x^4+y^4.

Exercice 4 ★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=8$ et $abc=4$.

1) Calculer $a^2+b^2+c^2$.

2) Expliquer pourquoi a, b, c sont non nuls, puis calculer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

3) Calculer $a^3+b^3+c^3$.

Exercice 5 ★

Déterminer tous les couples de réels (x,y) tels que $x^2+2y^2-2xy-2y+1=0$.

2 Factoriser pour résoudre

Exercice 6 ★★

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$.

Exercice 7 ★★

Factoriser $E=2x^2-xy-y^2+7x-y+6$, pour x et y réels, en produit de deux polynômes de degré 1.

Exercice 8 ★★

1) Factoriser $x^3+y^3+3xy-1$, pour x et y réels.

2) En déduire tous les couples de réels (x,y) tels que $x^3+y^3+3xy=1$.

Exercice 9 ★★

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que n^4+4 n'est pas un nombre premier.

2) Factoriser x^5+x+1 pour x réel, et en déduire que n^5+n+1 n'est pas un nombre premier.

Exercice 10 ★★

1) Démontrer l'identité de Lagrange : pour tous réels a, b, c, d, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

2) Vérifier que $1013=22^2+23^2$, puis écrire 2026 comme somme de deux carrés d'entiers.

3 Trois variables

Exercice 11 ★★

Soient a, b, c des réels. Montrer que $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Exercice 12 ★★

Soient a, b, c des réels non nuls tels que $a+b+c=0$. Calculer :

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}.$$

Exercice 13 ★★

Soient x, y, z des réels tels que $x+y+z=0$ et $x^2+y^2+z^2=6$. Calculer $xy+yz+zx$, puis $x^4+y^4+z^4$.

Exercice 14 ★★

Soient a, b, c des réels. Factoriser $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

Exercice 15 ★★

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3=0$.

4 Problèmes de synthèse

Exercice 16 ★★★

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=0$. Montrer que :

$$a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ca),$$

puis que $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice 17 ★★★

Soient a, b, c des réels. Factoriser $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

Exercice 18 ★★★

Soient a, b, c des réels. Montrer que $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$ est égal au produit de $(a+b)(b+c)(c+a)$ par un polynôme que l'on déterminera.

Exercice 19 ★★★

Soit n un entier naturel. On dit qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B s'il existe un polynôme Q tel que $A(x)=B(x)Q(x)$ pour tout réel x.

1) Montrer que, pour tout entier $k\geq 0$, $x^{3k}-1$ est divisible par x^2+x+1.

2) En déduire que $x^{2n}+x^n+1$ est divisible par x^2+x+1 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Exercice 20 ★★★

Déterminer tous les triplets de réels (x,y,z) tels que :

$$x+y+z=3, x^2+y^2+z^2=3.$$

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tous réels a et b : $a^3+b^3=(a+b)^3$.	☐	☐
2. Pour tous réels a et b : $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.	☐	☐
3. Si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.	☐	☐
4. Le polynôme x^2+1 se factorise en produit de deux polynômes de degré 1 à coefficients réels.	☐	☐