COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 2 — Identités et factorisation

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Les identités remarquables
2. Compléter le carré
3. Le théorème du facteur
4. Factoriser une expression à plusieurs variables
5. Les fonctions symétriques élémentaires
6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Connaître et savoir utiliser dans les deux sens les identités remarquables, y compris $a^3+b^3+c^3-3abc$ et l'identité de Sophie Germain.
- Compléter un carré pour obtenir une forme canonique ou une somme de carrés.
- Trouver un facteur à l'aide d'une valeur qui annule l'expression.
- Exprimer une expression symétrique à l'aide de $a+b+c$, $ab+bc+ca$ et abc.

1 Les identités remarquables

Dans tout le chapitre, les lettres désignent des nombres réels, sauf mention contraire. Toutes les identités se démontrent en développant le membre de droite ; elles s'utilisent dans les deux sens : **développer** ou **factoriser**.

◆ **Théorème — identités de degré 2 et 3**

Pour tous réels a, b, c :

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

2) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$;

4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

◆ **Théorème — différence de deux puissances**

Pour tous réels a, b et tout entier $n\geq 1$:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

Si de plus n est impair : $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.

◆ **Démonstration**

On développe : $a\times\left(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1}\right)=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}$ et $b\times\left(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1}\right)=a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n$. Par différence, tous les termes se simplifient sauf a^n-b^n.
Pour n impair, on remplace b par $-b$: $a^n-(-b)^n=a^n+b^n$.

◆ **Théorème — somme de trois cubes**

Pour tous réels a, b, c :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

En particulier, si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.

◆ **Démonstration**

En développant $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$, les termes a^3, b^3, c^3 apparaissent une fois, les termes a^2b, ab^2, etc. se simplifient deux à deux, et le terme abc apparaît trois fois avec le signe moins.
La seconde écriture vient de $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

◆ **Théorème — identité de Sophie Germain**

Pour tous réels a et b :

$$a^4+4b^4=\left(a^2+2ab+2b^2\right)\left(a^2-2ab+2b^2\right).$$

◆ **Démonstration**

On complète le carré : $a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2\right)^2-4a^2b^2=\left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2$, puis on utilise $X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$.

◆ **Théorème — identité de Lagrange (ou de Brahmagupta)**

Pour tous réels a, b, c, d :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Le produit de deux sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés.

◆ **Démonstration**

Les deux membres valent $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$: les doubles produits $\pm 2abcd$ se simplifient.

◆ **Exemple corrigé — un nombre composé**

Factoriser l'entier $8^4+4\times 3^4$, puis montrer que n^4+4 n'est pas premier pour tout entier $n\geq 2$.

Solution. Avec $a=8$ et $b=3$: $8^4+4\times 3^4=(64+48+18)(64-48+18)=130\times 34=4420$. Pour $n\geq 2$, avec $a=n$ et $b=1$:

$$n^4+4=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Le second facteur vaut $(n-1)^2+1\geq 2$, et le premier est strictement plus grand que le second : on a écrit n^4+4 comme produit de deux entiers au moins égaux à 2.

2 Compléter le carré

◆ **Propriété — forme canonique**

Pour tous réels $a\neq 0$, b, c et pour tout réel x :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],\Delta=b^2-4ac.$$

◆ **Démonstration**

$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ et $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$; il reste $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

◆ **Méthode — compléter le carré**

- Regrouper les termes qui contiennent une même variable : $x^2+2kx=(x+k)^2-k^2$.
- Pour une expression à deux variables, compléter d'abord le carré en x, puis en y : on obtient une somme de carrés, utile pour les inégalités et pour les équations.
- Pour faire apparaître une différence de deux carrés, on **ajoute et retranche** un même terme (comme dans l'identité de Sophie Germain).

◆ **Exemple corrigé — une équation à deux inconnues**

Déterminer tous les couples de réels (x,y) tels que $x^2+y^2-2x+4y+5=0$.

Solution. On complète les carrés : $x^2-2x+1+y^2+4y+4=0$, soit $(x-1)^2+(y+2)^2=0$. Une somme de deux carrés de réels est nulle si et seulement si chacun est nul : l'unique solution est $(x,y)=(1,-2)$.

◆ **Exemple corrigé — une factorisation inattendue**

Factoriser x^4+x^2+1 en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Solution. $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

3 Le théorème du facteur

◆ Définition — polynôme, racine

Un **polynôme** à coefficients réels est une expression $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$, où $a_0,\ldots,a_n$ sont des réels. Un réel r est une **racine** de P si $P(r)=0$.

◆ Théorème — théorème du facteur

Soit P un polynôme à coefficients réels et r un réel. Alors $P(r)=0$ si et seulement s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout réel x, $P(x)=(x-r)Q(x)$.

◆ Démonstration

Si $P(x)=(x-r)Q(x)$, alors $P(r)=0$. Réciproquement, supposons $P(r)=0$. Alors

$$P(x)=P(x)-P(r)=a_n(x^n-r^n)+\cdots+a_1(x-r).$$

Par le théorème de la différence de deux puissances, chaque x^k-r^k s'écrit $(x-r)$ multiplié par un polynôme ; on met $(x-r)$ en facteur dans la somme.

◆ Propriété — racines entières

Si P est à coefficients **entiers** et si l'entier r est une racine de P, alors r divise le coefficient constant a_0.

◆ Démonstration

De $a_n r^n+\cdots+a_1 r+a_0=0$, on tire $a_0=-r\left(a_n r^{n-1}+\cdots+a_1\right)$, et le facteur entre parenthèses est un entier.

◆ Exemple corrigé — chercher une racine

Factoriser $P(x)=x^3-3x+2$.

Solution. Les racines entières possibles divisent 2 : on teste $\pm1,\pm2$. On trouve $P(1)=0$, donc $x-1$ est un facteur : $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$. Le trinôme a encore la racine 1 : $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Finalement $P(x)=(x-1)^2(x+2)$.

4 Factoriser une expression à plusieurs variables

◆ Propriété — un facteur a − b

Soit $E(a,b,c)$ une expression polynomiale en a, b, c. Si E devient nulle lorsqu'on remplace a par b (pour toutes valeurs de b et de c), alors E est divisible par $a-b$.

◆ **Démonstration**

On regarde E comme un polynôme en la seule variable a, dont les coefficients dépendent de b et de c. Par hypothèse, $a=b$ en est une racine ; la démonstration du théorème du facteur s'applique sans changement et fournit le facteur $a-b$.

◆ **Définition — expression symétrique, antisymétrique**

Une expression en a, b, c est **symétrique** si elle ne change pas quand on échange deux des variables, et **antisymétrique** si elle change de signe quand on échange deux des variables.

◆ **Méthode — factoriser une expression à trois variables**

1) Tester les substitutions $a=b$, $b=c$, $c=a$, puis $a=-b$, $a+b+c=0$, etc.
2) Chaque substitution qui annule l'expression fournit un facteur : $a-b$, $a+b$, $a+b+c$, etc.
3) Comparer les **degrés** : le quotient a pour degré la différence des degrés ; s'il est de degré 0, c'est une constante.
4) Déterminer la constante (ou les coefficients restants) en donnant aux variables des **valeurs particulières**.

◆ **Exemple corrigé — une expression antisymétrique**

Factoriser $E=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

Solution. Pour $a=b$: $E=b^2(b-c)+b^2(c-b)+0=0$, donc $a-b$ divise E. De même, $b-c$ et $c-a$ divisent E. Les trois facteurs sont distincts et E est de degré 3 : $E=k(a-b)(b-c)(c-a)$ avec k constante. Pour $a=0$, $b=1$, $c=2$: $E=0+1\times 2+4\times(-1)=-2$ et $(a-b)(b-c)(c-a)=(-1)(-1)(2)=2$, donc $k=-1$ et

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

◆ **Attention**

La propriété du facteur $a-b$ demande que l'expression s'annule pour $a=b$ **quelles que soient** les autres variables. Une seule valeur numérique ne suffit pas. Enfin, il faut toujours vérifier le résultat sur un exemple numérique.

5 Les fonctions symétriques élémentaires

◆ **Définition — fonctions symétriques élémentaires**

Pour trois réels a, b, c, on pose $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ et $r=abc$. Pour deux réels x, y, on pose $s=x+y$ et $P=xy$.

◆ Théorème — expressions usuelles

1) $x^2+y^2=s^2-2P$ et $x^3+y^3=s^3-3Ps$.

2) $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$.

3) $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$.

4) Si a, b, c sont non nuls : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{q}{r}$.

5) $(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$.

◆ Démonstration

1) et 2) viennent des carrés et cubes de sommes. 3) L'identité de la partie 1 donne $a^3+b^3+c^3=3r+p(a^2+b^2+c^2-q)=3r+p(p^2-3q)$. 4) On réduit au même dénominateur abc. 5) On écrit $a+b=p-c$, etc., et l'on développe $(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-p^2\cdot p+pq-r$.

◆ Propriété — retrouver les nombres à partir de p, q, r

Pour tout réel t : $(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-pt^2+qt-r$. Deux réels x et y sont les racines du trinôme t^2-st+P.

◆ Exemple corrigé — calculer sans connaître les nombres

Soient a, b, c des réels tels que $a+b+c=2$, $ab+bc+ca=-1$ et $abc=-2$. Calculer $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$.

Solution. $a^2+b^2+c^2=4+2=6$ et $a^3+b^3+c^3=8-3\times2\times(-1)+3\times(-2)=8$. *Vérification* : a, b, c sont les racines de $t^3-2t^2-t+2=(t-2)(t-1)(t+1)$, soit $2, 1, -1$: on a bien $4+1+1=6$ et $8+1-1=8$.

6 Fiche mémo

Notion	À retenir
Puissances	$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})$; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Trois cubes	$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
Sophie Germain	$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$
Lagrange	$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$
Forme canonique	$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
Facteur	$P(r)=0 \Leftrightarrow (x-r)$ divise $P(x)$; racine entière : r divise a_0
Symétriques	$a^2+b^2+c^2=p^2-2q$; $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$
Antisymétrique	$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$