EXERCICES • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 — Inégalités classiques

Ali AKIR — Formateur olympique

Les exercices sont classés par difficulté : ★ application directe, ★★ une idée à trouver, ★★★ niveau olympique. Chaque énoncé précise l'ensemble auquel appartiennent les variables. Pour chaque inégalité, on demande aussi le cas d'égalité.

1 Sommes de carrés et IAG

Exercice 1 ★

Soient a, b, c des nombres réels. Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Exercice 2 ★

1) Soit x un réel strictement positif. Montrer que :

$$x+\frac{1}{x} \geq 2.$$

2) Soient a et b deux réels strictement positifs. En déduire que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$$

Exercice 3 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Exercice 4 ★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Exercice 5 ★★

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls tels que $a+b+c=3$.

1) Montrer que $ab+bc+ca \leq 3$.

2) Montrer que $abc \leq 1$.

Exercice 6 ★★

1) Soient a et b des réels positifs ou nuls. Montrer que $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$.

2) Soient a, b, c des réels quelconques. Montrer que :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

3) En déduire que $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ pour tous réels a, b, c positifs ou nuls.

Exercice 7 ★★

Déterminer la plus petite valeur prise par $x^2+\frac{2}{x}$ lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs, et préciser pour quelle valeur de x elle est atteinte.

Exercice 8 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c.$$

Exercice 9 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc=1$.

1) Montrer que $a+b+c\geq 3$.

2) Montrer que $a^2+b^2+c^2\geq a+b+c$.

2 Cauchy-Schwarz et forme de Titu

Exercice 10 ★

Soient a, b, c des nombres réels. Montrer que $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice 11 ★

Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$. Montrer que :

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq 36.$$

Exercice 12 ★★

Soient a, b, c des nombres réels tels que $a+2b+3c=14$. Déterminer la plus petite valeur possible de $a^2+b^2+c^2$ et les réels a, b, c pour lesquels elle est atteinte.

Exercice 13 ★★

Soient x, y, z des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}.$$

Exercice 14 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

Exercice 15 ★★ *APMO 1991, problème 3*

Soient $n\geq 1$ un entier et $a_1,\ldots,a_n, b_1,\ldots,b_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1+\cdots+a_n=b_1+\cdots+b_n$. Montrer que :

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

3 Réarrangement et Tchebychev

Exercice 16 ★

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls. Montrer que $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$.

Exercice 17 ★★

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls. Montrer que $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Exercice 18 ★★

Soient $n\geq 2$ un entier et $x_1,\ldots,x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq n.$$

Exercice 19 ★★

Soient a, b, c des nombres réels.

1) Montrer que $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

2) Montrer que $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$.

3) En déduire que $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

Exercice 20 ★★

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, que :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

4 Problèmes d'olympiades

Exercice 21 ★★ *OIM 1984, problème 1*

Soient x, y, z des réels positifs ou nuls tels que $x+y+z=1$. Montrer que :

$$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}.$$

Exercice 22 ★★ *OIM 1964, problème 2*

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle (ce sont donc des réels strictement positifs vérifiant $a<b+c$, $b<c+a$ et $c<a+b$). Montrer que :

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc.$$

Exercice 23 ★★★ *OIM 1995, problème 2*

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc=1$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Exercice 24 ★★★ *OIM 2000, problème 2*

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc=1$. Montrer que :

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

Exercice 25 ★★★ *USAMO 2003, problème 5*

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Auto-évaluation : vrai ou faux ?

Affirmation	Vrai	Faux
1. Pour tous réels a et b : $a+b\geq 2\sqrt{\lvert ab\rvert}$.	☐	☐
2. Pour tous réels a, b, c : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.	☐	☐
3. Pour tout réel x non nul : $x+\frac{1}{x}\geq 2$.	☐	☐
4. Pour tous réels a, b, c strictement positifs : $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.	☐	☐