COURS • OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 — Inégalités classiques

Ali AKIR — Formateur olympique

◆ **Sommaire**

1. Les carrés : la source de toutes les inégalités
2. L'inégalité arithmético-géométrique (IAG) et les moyennes
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la forme de Titu
4. L'inégalité de réarrangement et l'inégalité de Tchebychev
5. Techniques : cas d'égalité, homogénéité, substitution, méthode de la tangente
6. Fiche mémo

◆ **L'essentiel à retenir — Objectifs du chapitre**

- Reconnaître une somme de carrés et l'utiliser pour démontrer une inégalité.
- Appliquer l'IAG et la chaîne des moyennes, en précisant toujours le **cas d'égalité**.
- Utiliser Cauchy-Schwarz, en particulier sous la forme de Titu (ou d'Engel), pour les sommes de fractions.
- Exploiter l'ordre des variables : réarrangement, Tchebychev.
- Choisir une technique adaptée : homogénéiser, substituer, majorer chaque terme par une tangente.

1 Les carrés : la source de toutes les inégalités

Toute inégalité classique repose finalement sur un fait élémentaire : **un carré de réel est positif ou nul**. Dans tout le chapitre, « positif » signifie « positif ou nul ».

◆ **Propriété — inégalités de base**

Pour tous réels a, b, c :

1) $a^2+b^2\geq 2ab$, avec égalité si et seulement si $a=b$;

2) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, avec égalité si et seulement si $a=b=c$;

3) $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ et $3(a^2+b^2+c^2)\geq (a+b+c)^2$.

◆ **Démonstration**

1) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$.

2) On double : $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, nul si et seulement si $a=b=c$.

3) On développe $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ et l'on utilise 2).

◆ **Exemple corrigé — une inégalité à deux variables**

Montrer que pour tous réels x et y : $x^2+xy+y^2\geq 0$, avec égalité si et seulement si $x=y=0$.

Solution. On complète le carré :

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0.$$

L'égalité impose $y=0$, puis $x=0$.

◆ **Méthode — la méthode des sommes de carrés**

- Écrire la différence « membre de gauche moins membre de droite ».
- La factoriser ou la réécrire comme une **somme de carrés** à coefficients positifs.
- Lire le cas d'égalité : chaque carré doit être nul.

2 L'inégalité arithmético-géométrique et les moyennes

◆ **Définition — moyennes de réels strictement positifs**

Pour des réels $x_1,\dots,x_n$ strictement positifs, on définit la moyenne quadratique Q, la moyenne arithmétique A, la moyenne géométrique G et la moyenne harmonique H :

$$Q=\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}},\ A=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\ G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\ H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

◆ **Théorème — inégalité arithmético-géométrique (IAG)**

Pour tous réels positifs $x_1,\dots,x_n$:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1=x_2=\cdots=x_n$. Pour $n=2$: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

◆ **Démonstration**

Pour $n=2$: $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$. Si l'un des nombres est nul, l'inégalité est évidente ; on les suppose strictement positifs et l'on raisonne par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant clair.

Soit $n\geq 2$ et A la moyenne de $x_1,\dots,x_n$. Si tous les x_i sont égaux, il y a égalité. Sinon, quitte à renuméroter, $x_{n-1}<A<x_n$. On pose $y_i=x_i$ pour $i\leq n-2$ et $y_{n-1}=x_{n-1}+x_n-A>0$. Les $n-1$ nombres y_i ont pour somme $nA-A$, donc pour moyenne A ; par hypothèse de récurrence, $y_1y_2\cdots y_{n-1}\leq A^{n-1}$. Or

$$Ay_{n-1}-x_{n-1}x_n=\left(A-x_{n-1}\right)\left(x_n-A\right)>0,$$

donc $x_1\cdots x_n<y_1\cdots y_{n-2}\cdot Ay_{n-1}\leq A^n$: l'inégalité est stricte dès que les x_i ne sont pas tous égaux.

◆ Théorème — chaîne des moyennes

Pour des réels strictement positifs : $Q \geq A \geq G \geq H$, chaque égalité ayant lieu si et seulement si tous les x_i sont égaux.

◆ Démonstration

$A \geq G$ est l'IAG. En l'appliquant aux nombres $\frac{1}{x_i}$, on obtient $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$, soit $G \geq H$. Enfin $Q \geq A$ équivaut à $n\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right) \geq \left(x_1+\cdots+x_n\right)^2$, qui résulte de $\sum_{i<j}\left(x_i-x_j\right)^2 \geq 0$.

◆ Exemple corrigé — un minimum

Déterminer le minimum de $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ pour $x>0$.

Solution. On découpe $\frac{16}{x}$ en deux termes égaux pour que le produit ne dépende plus de x :

$$x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3\sqrt[3]{64} = 12.$$

L'égalité a lieu pour $x^2=\frac{8}{x}$, soit $x=2$: le minimum vaut $f(2)=12$.

◆ Attention

L'IAG ne s'applique qu'à des nombres **positifs** : pour $a=b=-1$, on a $a+b=-2<2\sqrt{ab}=2$. Pour obtenir un minimum, il faut aussi vérifier que le cas d'égalité est atteint.

3 L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la forme de Titu

◆ Théorème — inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous réels $a_1,\ldots,a_n$ et $b_1,\ldots,b_n$:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les suites (a_i) et (b_i) sont proportionnelles.

◆ **Démonstration**

Si tous les a_i sont nuls, c'est évident. Sinon, pour tout réel t,

$P(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i t+b_i)^2=t^2\sum a_i^2+2t\sum a_i b_i+\sum b_i^2\geq 0$. Ce trinôme du second degré ne change pas de signe, donc son discriminant est négatif ou nul : $4\left(\sum a_i b_i\right)^2-4\sum a_i^2\sum b_i^2\leq 0$. L'égalité équivaut à l'existence d'une racine t, c'est-à-dire à $b_i=-t\,a_i$ pour tout i.

◆ **Théorème — forme de Titu (ou d'Engel)**

Pour tous réels $x_1,\dots,x_n$ et tous réels strictement positifs $y_1,\dots,y_n$:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n},$$

avec égalité si et seulement si $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$.

◆ **Démonstration**

On applique Cauchy-Schwarz avec $a_i=\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ et $b_i=\sqrt{y_i}$: $\left(\sum x_i\right)^2=\left(\sum a_i b_i\right)^2\leq\sum\frac{x_i^2}{y_i}\cdot\sum y_i$.

◆ **Exemple corrigé — l'inégalité de Nesbitt**

Montrer que pour tous réels a, b, c strictement positifs : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Solution. On écrit $\frac{a}{b+c}=\frac{a^2}{a(b+c)}$ et l'on applique la forme de Titu :

$$\sum\frac{a^2}{a(b+c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2},$$

la dernière inégalité étant $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ (partie 1). Égalité si et seulement si $a=b=c$.

◆ **Méthode — quand penser à Titu**

- Une somme de fractions à numérateurs positifs : on fait apparaître des **carrés au numérateur** en multipliant numérateur et dénominateur par un même facteur.
- On choisit ce facteur pour que la somme des dénominateurs soit simple (symétrique, ou connue grâce à l'hypothèse).

4 L'inégalité de réarrangement et l'inégalité de Tchebychev

◆ Théorème — inégalité de réarrangement

Soient $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ et $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ des réels, et $(c_1, \ldots, c_n)$ une permutation de $(b_1, \ldots, b_n)$. Alors

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \le a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

La somme est maximale quand les deux suites sont rangées dans le même ordre, minimale quand elles sont rangées en sens contraires.

◆ Démonstration

Supposons que (c_i) ne soit pas rangée dans l'ordre croissant : il existe $i < j$ avec $c_i > c_j$. Échangeons c_i et c_j ; la somme varie de

$$(a_i c_j + a_j c_i) - (a_i c_i + a_j c_j) = (a_j - a_i)(c_i - c_j) \ge 0.$$

Chaque échange diminue le nombre de couples mal rangés, donc après un nombre fini d'échanges on obtient la suite croissante (b_i) sans avoir diminué la somme : d'où l'inégalité de droite. Celle de gauche s'obtient en appliquant ce résultat à $(-b_i)$.

◆ Théorème — inégalité de Tchebychev

Si les suites (a_i) et (b_i) sont rangées dans le même ordre, alors

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \ge (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n),$$

l'inégalité étant renversée si les suites sont rangées en sens contraires.

◆ Démonstration

Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, le réarrangement donne $\sum_i a_i b_i \ge \sum_i a_i b_{i+k}$, les indices étant pris modulo n. En sommant ces n inégalités, le membre de droite vaut $\sum_i a_i \sum_j b_j$.

◆ Exemple corrigé — une inégalité cyclique

Montrer que pour tous réels a, b, c strictement positifs : $a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Solution. Les suites (a^2, b^2, c^2) et (a, b, c) sont rangées dans le même ordre. Par réarrangement, $a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c$ est supérieur à $a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a$, qui correspond à une permutation de (a, b, c).

5 Techniques : cas d'égalité, homogénéité, substitution, tangente

◆ **Méthode — avant toute chose, chercher le cas d'égalité**

- Tester des valeurs simples : toutes les variables égales, une variable nulle, deux variables égales.
- Le cas d'égalité indique quelle inégalité utiliser : l'IAG ou Cauchy-Schwarz doivent être appliquées de sorte que **leur** cas d'égalité contienne celui de l'énoncé.

◆ **Définition — inégalité homogène**

Une inégalité est **homogène de degré** d si, lorsqu'on multiplie toutes les variables par $t>0$, chaque membre est multiplié par t^d. On peut alors imposer une **normalisation** : $a+b+c=3$, ou $abc=1$, ou $a^2+b^2+c^2=3$, etc.

◆ **Méthode — substitutions classiques**

- Contrainte $abc=1$ avec $a,b,c>0$: poser $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ (possible avec $x=1$, $y=\frac{1}{a}$, $z=\frac{1}{ab}$), ou poser $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$.
- Contrainte $a+b+c=1$: remplacer une constante par $a+b+c$ pour **homogénéiser**.

◆ **Propriété — méthode de la tangente**

Pour démontrer $f(a)+f(b)+f(c)\le 3f(1)$ (ou l'inégalité inverse) sous la contrainte $a+b+c=3$, il suffit d'établir $f(x)\le f(1)+m(x-1)$ (ou l'inégalité inverse) pour tout x admissible, avec une constante m bien choisie : la droite d'équation $y=f(1)+m(x-1)$ doit « toucher » la courbe de f au point d'abscisse 1, ce que l'on vérifie en factorisant par $(x-1)^2$. En sommant, les termes $m(x-1)$ s'annulent.

◆ **Exemple corrigé — tangente**

Soient a, b, c des réels positifs ou nuls tels que $a+b+c=3$. Montrer que $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$.

Solution. On cherche $\frac{1}{x^2+1}\ge\frac{1}{2}-\frac{x-1}{2}$ pour $x\ge 0$, soit $\frac{1}{x^2+1}\ge\frac{2-x}{2}$. Si $x\ge 2$, c'est évident. Sinon, cela équivaut à $2\ge(2-x)(x^2+1)$, soit $x^3-2x^2+x\ge 0$, c'est-à-dire $x(x-1)^2\ge 0$: vrai. En sommant, $\sum\frac{1}{a^2+1}\ge\frac{6-(a+b+c)}{2}=\frac{3}{2}$, avec égalité pour $a=b=c=1$.

6 Fiche mémo

Notion	À retenir
Carrés	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$; $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$
IAG	$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, égalité si tous égaux

Notion	À retenir
Moyennes	$Q \geq A \geq G \geq H$
Cauchy-Schwarz	$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$
Titu	$\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\sum y_i}$
Nesbitt	$\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$
Réarrangement	même ordre : somme maximale ; ordres contraires : somme minimale
Tchebychev	$n \sum a_i b_i \geq \sum a_i \sum b_i$ (même ordre)
Techniques	cas d'égalité, normalisation, substitution $a = \frac{x}{y}$, tangente