EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 17 — Statistiques

Exercice 1

Le tableau donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA), en millions de dinars, d'une entreprise sur la période 1996–2002.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
CA y_i	164	182	200	221	246	270	300

La droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 22,5\,x + 158,64$ (coefficients arrondis à 10^{-2}).

1. À l'aide de cet ajustement, déterminer le chiffre d'affaires que l'entreprise peut prévoir en 2005.
2. L'ajustement affine ne semblant pas traduire l'évolution du chiffre d'affaires, on pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Calculer les z_i, arrondis à 10^{-2}.
   b. Déterminer, à la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3}).
   c. En déduire une relation de la forme $y = B\,e^{ax}$ (B arrondi à l'entier).
3. On admet que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 164\,e^{0,1x}$ modélise l'évolution du chiffre d'affaires.
   a. Donner une nouvelle estimation, arrondie au million de dinars, du chiffre d'affaires en 2005.
   b. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires dépassera 500 millions de dinars ?

Exercice 2

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} ; le détail des calculs n'est pas demandé. On étudie l'évolution des records du 100 mètres masculin depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps y_i **(s)**	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

Changement de variables utilisé à la question 2 : $X = e^{-0,00924\,x}$ et $Y = \ln y$.

X_i	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
Y_i	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

1. *Modèle affine.*
   a. Construire le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ (unités : 1 cm pour dix ans en abscisse, 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnée, graduations commençant au point $(0\,;9)$).

b. Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Permet-il des prévisions pertinentes à long terme ?

2. *Modèle exponentiel.* On pose $X = e^{-0,00924x}$ et $Y = \ln y$ (valeurs dans le second tableau ci-dessus).
   a. Donner une équation de la droite de régression de Y en X.
   b. En déduire que l'on peut modéliser y sous la forme $y = \exp\left(a\,e^{-0,00924x} + b\right)$, où a et b sont des réels à déterminer.
   c. Quel record peut-on prévoir en 2010 avec ce modèle ?
   d. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \exp\left(0,154\,e^{-0,00924x} + 2,221\right)$.
   e. Que peut-on en conclure, selon ce modèle, sur les records du 100 mètres à très long terme ?

Exercice 3

Le prix d'équilibre d'un produit est le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. Une étude a donné (prix en dinars par kilogramme, quantités en milliers de kilogrammes) :

Prix x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. *Représentation graphique.* Représenter sur un même graphique les nuages de points (x_i, y_i) et (x_i, z_i) (unités : 10 cm pour 1 dinar en abscisse, 2 cm pour 1 millier de kg en ordonnée).
2. *Étude de la demande.* On pose $Y_i = \ln y_i$.
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, Y_i). Un ajustement affine de Y en x est-il satisfaisant ?
   b. Donner une équation de la droite de régression de Y en x, puis une estimation de la demande y en fonction du prix x.
3. *Étude de l'offre.*
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Un ajustement affine de z en x est-il satisfaisant ?
   b. Donner une équation de la droite de régression de z en x.
4. *Étude graphique du prix d'équilibre.* On modélise la demande et l'offre par $f(x) = e^{-1,41x+2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$ sur $[0,2]$.
   a. Étudier le sens de variation de f sur $[0,2]$ et dresser son tableau de variation.
   b. Tracer les courbes de f et g sur le graphique de la question 1.
   c. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
5. *Étude numérique.* Soit $h = f - g$ sur $[0,2]$.
   a. Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[0,2]$; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.
   c. Quel est le prix d'équilibre du produit ?

Exercice 4

Les calculs peuvent être faits à la calculatrice. Le tableau donne la charge maximale y_i (en tonnes) qu'une grue peut lever pour une longueur de flèche x_i (en mètres).

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. (Résultats à 10^{-2} près.)
   a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ (1 cm pour 2 m en abscisse, 1 cm pour 1 t en ordonnée).
   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
   c. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et la tracer.
   d. En déduire la charge maximale pour une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?
2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.
   a. Compléter le tableau des z_i (arrondis à 10^{-3}).
   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z, puis une équation de la droite de régression de z en x (résultats à 10^{-4} près).
   c. En déduire la valeur de z pour $x = 26$, puis la charge maximale pour une flèche de 26 mètres. Ce résultat paraît-il plus satisfaisant que celui de 1.d ? Pourquoi ?

Exercice 5

Le tableau donne l'indice y_i (base 100 en 1990) du chiffre d'affaires à l'exportation d'une entreprise ; x_i est le rang de l'année.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

1.
   a. Représenter le nuage de points (origine $(0 ; 100)$; $1,5$ cm par an ; 2 cm pour 10 points d'indice).
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G (ordonnée arrondie au dixième) et le placer.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire (arrondi au centième). Un ajustement affine est-il envisageable ?
3. Soit D la droite de régression de y en x.
   a. Donner le coefficient directeur de D, arrondi au dixième.
   b. À l'aide de G, donner une équation de D et la tracer.
4. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon, estimer l'indice du chiffre d'affaires en 2001 (arrondi à l'unité).

Exercice 6

La cote d'une voiture d'occasion selon son année de mise en circulation est donnée par :

Année	1991	1992	1993	1994	1995
Rang x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i **(dinars)**	42 900	54 200	64 100	81 600	102 000

1. Représenter le nuage de points (2 cm pour un an ; 1 cm pour $10\,000$ dinars).
2. On pose $z = \ln y$.
   a. Compléter le tableau des z_i (valeurs approchées à 10^{-2} par défaut).
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?
   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x (coefficients arrondis à 10^{-2} par défaut).
   d. Calculer la valeur de z donnée par cette équation pour l'année 1988 ; en déduire une estimation de la cote d'une voiture de 1988 (arrondie à 100 dinars).

Exercice 7

Un fournisseur d'accès à Internet a relevé l'indice de son nombre d'abonnés (base 100 en 2000).

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200

Partie A.

1. Le nombre d'abonnés était de 2040 en 2000. Quel est-il en 2004 ?
2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
4. Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour 2005 et 2010 (à l'unité près) ?

Partie B. On pose $z = \ln y$.

1. Compléter le tableau des z_i (arrondis à 10^{-2}).
2. Construire le nuage de points (x_i, z_i) et la droite de régression de z en x, d'équation $z = 0,17x + 4,39$.
3. Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i.
4. En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour 2005 et 2010.

Exercice 8

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x_i (en milliers de dinars) et ses ventes y_i (en milliers d'articles) sur six mois (données fictives).

x_i	2	3	5	6	8	10
y_i	22	27	35	41	48	57

1. Calculer les coordonnées du point moyen G, la covariance et le coefficient de corrélation linéaire (à 10^{-3} près). Un ajustement affine est-il justifié ?
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x (coefficients à 10^{-2} près).
3. Estimer les ventes pour une dépense de 12 milliers de dinars.

Exercice 9

On a mesuré la taille y (en milliers d'individus) d'une population de bactéries en fonction du temps t (en heures) (données fictives).

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1,2	1,9	3,1	4,8	7,7	12,4

1. On pose $z = \ln y$. Calculer les z_i (à 10^{-2} près), puis le coefficient de corrélation entre t et z.
2. Donner une équation de la droite de régression de z en t (coefficients à 10^{-3} près) ; en déduire y sous la forme $y = k\,e^{at}$.
3. Estimer la population au bout de 7 heures, puis le temps de doublement de la population.

Exercice 10

On a relevé les notes de mathématiques x et de physique y de huit élèves (données fictives).

x_i	8	10	11	12	13	14	15	17
y_i	7	9	11	11	12	15	14	17

1. Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, $V(x)$, $V(y)$, $cov(x, y)$ et le coefficient de corrélation r.
2. Déterminer les droites de régression D_1 de y en x et D_2 de x en y. Vérifier que le produit de leurs coefficients directeurs (au sens $y = ax + b$ et $x = a'y + b'$) vaut r^2.
3. Estimer la note de physique d'un élève ayant obtenu 16 en mathématiques.