EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 16 — Probabilités

## Exercice 1

Une urne contient $12$ boules blanches et $8$ boules noires. Chacune des $20$ boules a la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément $5$ boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. $3$ boules blanches et $2$ boules noires ?
   b. des boules qui ne sont pas toutes de la même couleur ?
2. On tire successivement $5$ boules, avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a. $3$ boules blanches et $2$ boules noires, dans cet ordre ?
   b. $3$ boules blanches et $2$ boules noires, dans un ordre quelconque ?
3. On tire successivement $3$ boules, en remettant la boule si elle est blanche et en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer :
   a. exactement une boule blanche ?
   b. au moins une boule blanche ?

## Exercice 2

Deux urnes indiscernables $U_1$ et $U_2$ contiennent : $U_1$ : $3$ boules rouges et $2$ boules vertes ; $U_2$ : $2$ boules rouges et $1$ boule verte. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la boule soit rouge ?
2. On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne $U_1$ ?

## Exercice 3

Une urne contient $3$ jetons marqués (a) et $2$ jetons marqués (b). On tire successivement et sans remise deux jetons. Quelle est la probabilité de tirer un jeton (b) en premier et un jeton (a) en second ?

## Exercice 4

Une urne contient des jetons rouges et noirs, portant chacun un numéro. On tire un jeton au hasard. La probabilité que le jeton soit rouge est $\frac{1}{3}$, qu'il porte un numéro pair est $\frac{4}{9}$, qu'il soit rouge et porte un numéro pair est $\frac{1}{9}$.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit noir ?
2. Quelle est la probabilité qu'il porte un numéro impair ?
3. Quelle est la probabilité qu'il soit noir et porte un numéro impair ?
4. Les événements « être noir » et « porter un numéro impair » sont-ils indépendants ?
5. Sachant que le jeton tiré est noir, quelle est la probabilité qu'il porte un numéro impair ?

## Exercice 5

**I.** Une urne contient deux boules blanches et $n$ boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules ; on note $A_2$ l'événement « le joueur a tiré deux boules blanches ». Déterminer $n$ pour que $p(A_2)=\frac{1}{15}$.

**II.** Dans la suite, $n=4$. Un joueur tire simultanément deux boules ; on note $A_0$ : « deux boules noires », $A_1$ : « une noire et une blanche », $A_2$ : « deux blanches ».

1. Calculer $p(A_0)$ et $p(A_1)$.
2. Le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et perd deux points pour chaque boule noire tirée. Calculer la probabilité qu'il soit gagnant (score strictement positif).

**III.** Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires dans l'urne, laisse de côté les boules blanches tirées, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules. Soit $B_i$ l'événement « on obtient $i$ boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i=0,1,2$).

1. Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0\cap A_2)$. Calculer de même $p(B_0\cap A_1)$ et $p(B_0\cap A_0)$. En déduire que $p(B_0)=\frac{41}{75}$.
2. Montrer de même que $p(B_2)=\frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

## Exercice 6

On dispose de deux dés cubiques d'apparence identique : l'un est parfait, l'autre est truqué ; pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est $\frac{1}{3}$. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. 
   a. On lance le dé parfait $3$ fois de suite (lancers indépendants). Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.
   b. Même question avec le dé truqué.
2. On choisit l'un des deux dés au hasard et on le lance $3$ fois de suite. On note $T$ : « choisir le dé truqué », $A$ : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six », $B$ : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six », $C$ : « obtenir exactement deux six ».
   a. Calculer $p(A)$ puis $p(B)$.
   b. En déduire $p(C)$.
   c. Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.

## Exercice 7

1. Une urne $U_1$ contient $2$ jetons numérotés $1$ et $2$ ; une urne $U_2$ contient $4$ jetons numérotés $1$, $2$, $3$ et $4$. On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.
   a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro $1$ ?
   b. On a tiré un jeton portant le numéro $1$. Quelle est la probabilité qu'il provienne de $U_1$ ?
2. On rassemble les deux urnes en une seule contenant les $6$ jetons. On tire simultanément et au hasard $2$ jetons.

a. Calculer la probabilité de tirer $2$ jetons portant le même numéro.

b. Soit $S$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des $2$ jetons tirés. Déterminer la loi de $S$.

c. Deux joueurs, Claude et Dominique, conviennent que, si la somme est impaire, Claude donne $10$ dinars à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit $\lambda$ dinars de Dominique. Soit $X$ le gain algébrique de Claude. Calculer $E(X)$ en fonction de $\lambda$, puis déterminer $\lambda$ pour que le jeu soit équitable ($E(X)=0$).

## Exercice 8

Une urne contient $4$ boules rouges et $2$ boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules. On note $A_0$ : « aucune boule noire », $A_1$ : « une seule boule noire », $A_2$ : « deux boules noires ». Montrer que $p(A_0)=\frac{6}{15}$ et $p(A_1)=\frac{8}{15}$ ; en déduire $p(A_2)$.
2. Il reste $4$ boules dans l'urne ; on effectue un second tirage simultané de deux boules. On note $B_0$, $B_1$, $B_2$ les événements « aucune », « une seule », « deux » boules noires au second tirage.
   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b. Calculer $p(B_0)$.
   c. On n'a obtenu aucune boule noire au second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier ?
3. Soit $R$ l'événement « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient sorties ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

## Exercice 9

$250$ candidats se présentent à un examen comportant une épreuve écrite et une épreuve orale. Un candidat ne peut passer l'oral que s'il est admis à l'écrit.

1. Sachant que $120$ candidats sont admis à l'écrit, quelle est la probabilité qu'un candidat passe l'oral ?
2. $60$ candidats seulement sont déclarés admis. Quelle est la probabilité qu'un candidat admis à l'écrit réussisse l'oral ?

## Exercice 10

On fait tourner une roue comportant $12$ secteurs de même taille numérotés de $1$ à $12$. Les secteurs de numéro pair sont jaunes ; les secteurs de numéro impair multiple de $3$ sont verts ; les autres sont rouges. Si la roue s'arrête sur un secteur vert, on tire un billet dans une urne $A$, sinon dans une urne $B$. Dans $A$, un billet sur quatre est gagnant ; dans $B$, un billet sur vingt. Calculer la probabilité d'obtenir un billet gagnant.

## Exercice 11

Un fumeur essaie de réduire sa consommation. S'il reste un jour sans fumer, il fume le lendemain avec la probabilité $0,4$ ; s'il fume un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $0,2$. On note $U_n$ la probabilité qu'il fume le $n$-ième jour.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}=-0,2U_n+0,4$.

2. On pose $V_n = U_n - \frac{1}{3}$. Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique.
3. En déduire $U_n$ en fonction de $n$ et de $U_1$.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

## Exercice 12

Soit $A$ et $B$ deux événements indépendants.

1. Démontrer que $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants, et qu'il en est de même de $A$ et $\overline{B}$, et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. On suppose $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,6$. Calculer $p(A \cup B)$, $p(A \cup \overline{B})$, $p(\overline{A} \cup B)$ et $p(\overline{A} \cup \overline{B})$.

## Exercice 13

Un grossiste est approvisionné par trois marques $M_1$, $M_2$, $M_3$ : la moitié de son stock provient de $M_1$, un huitième de $M_2$ et trois huitièmes de $M_3$. $13\,\%$ des appareils de $M_1$, $5\,\%$ de ceux de $M_2$ et $10\,\%$ de ceux de $M_3$ sont rouges. On choisit au hasard un appareil emballé.

1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de $M_3$ ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vient de $M_2$ ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rouge ?
4. L'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque $M_1$ ?

## Exercice 14

On considère $n$ sacs $S_1, \ldots, S_n$ $(n \geq 3)$ : $S_1$ contient trois boules blanches et une noire ; chacun des autres contient quatre boules noires et une blanche.

**Partie A.** On tire une boule de chacun des sacs $S_1$, $S_2$, $S_3$. Soit $X$ le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de $X$, puis calculer $E(X)$.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition $F$ de $X$.

**Partie B.** On tire une boule de $S_1$ et on la place dans $S_2$, puis on tire une boule de $S_2$ et on la place dans $S_3$, et ainsi de suite jusqu'au $k$-ième tirage $(1 \leq k \leq n)$. On note $a_k$ la probabilité de l'événement $A_k$ : « obtenir une boule blanche au $k$-ième tirage ».

1. Calculer $p(A_k / A_{k-1})$ et $p(A_k / \overline{A_{k-1}})$ pour $k \geq 2$ ; en déduire que $a_k = \frac{1}{6} a_{k-1} + \frac{1}{6}$.
2. On pose $b_k = a_k - \frac{1}{5}$. Montrer que $(b_k)$ est une suite géométrique. En déduire $a_k$ en fonction de $k$.

## Exercice 15

On parie sur un nombre de $1$ à $6$, puis on lance $3$ dés. Si le nombre parié sort $3$ fois, on gagne $3$ dinars ; $2$ fois, $2$ dinars ; $1$ fois, $1$ dinar ; s'il ne sort pas, on perd $1$ dinar. Soit $X$ le gain lors d'une partie.

1. Déterminer la loi de $X$, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition $F$ de $X$.

## Exercice 16

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit $n \geq 2$. On répète $n$ fois l'épreuve « tirer une boule puis la remettre » (tirages équiprobables et indépendants). On note $p_n$ la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n$-ième tirage.

1. Calculer $p_2$, $p_3$ et $p_4$.
2. On note $B_n$ : « on tire une boule blanche au $n$-ième tirage » et $U_n$ : « on tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer $p(B_n)$.
   b. Exprimer $p(U_n)$ en fonction de $n$.
   c. En déduire $p_n$ et vérifier que $p_n = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \ldots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   b. Déterminer la limite de $(S_n)$.

## Exercice 17

Robin joue à un jeu électronique : chaque partie est un duel contre l'un des monstres $M_1$, $M_2$, $M_3$ choisi par la machine. $M_1$ apparaît avec la probabilité $\frac{1}{2}$, $M_2$ et $M_3$ ont la même probabilité d'apparition. Robin gagne avec la probabilité $0,3$ contre $M_1$, $0,4$ contre $M_2$ et $1$ contre $M_3$.

1. Calculer la probabilité que Robin gagne une partie.
2. Sachant que Robin a perdu la partie, quelle est la probabilité :
   a. qu'il ait joué contre $M_1$ ?
   b. qu'il ait joué contre $M_3$ ?
3. Robin joue quatre parties indépendantes. Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins une.

## Exercice 18

Une machine tombe au plus une fois en panne par mois. Si elle n'a pas de panne le mois $n$, la probabilité qu'elle en ait une le mois $n+1$ est $0,24$ ; si elle tombe en panne le mois $n$, la probabilité qu'elle tombe en panne le mois $n+1$ est $0,04$. La probabilité de panne le premier mois est $0,1$. On note $E_n$ : « la machine tombe en panne le $n$-ième mois » et $p_n = p(E_n)$ ; ainsi $p_1 = 0,1$.

1.
   a. Donner $p(E_{n+1}/E_n)$ et $p(E_{n+1}/\overline{E_n})$. Exprimer $p(E_n \cap E_{n+1})$ et $p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ en fonction de $p_n$.
   b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,24 - 0,2\,p_n$.
2.
   a. Résoudre l'équation $p = 0,24 - 0,2\,p$.
   b. On pose $u_n = p_n - p$. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ ; en déduire $u_n$ et $p_n$ en fonction de $n$.
   c. Montrer que $(p_n)$ converge et préciser sa limite.

## Exercice 19

Un magasin stocke des boîtes rouges ($25\,\%$) et bleues ($75\,\%$), chacune protégée par un carton. Parmi les cartons contenant une boîte rouge, $45\,\%$ portent la marque M ; parmi ceux contenant une boîte bleue, $60\,\%$. On prend un carton au hasard.

1. On ouvre le carton : il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité $p_1$ que le carton porte la marque M ? Si la boîte était bleue, quelle serait la probabilité $p_2$ ?
2. Quel est le pourcentage de cartons marqués M ? En déduire la probabilité $p_3$ qu'un carton tiré porte la marque M.
3. On n'ouvre pas le carton, mais on remarque qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité $p_4$ qu'il contienne une boîte rouge ?

## Exercice 20

Quatre filles et trois garçons passent un oral ; l'ordre de passage est tiré au hasard.

1. L'examinateur tire les sept noms l'un après l'autre. On note $F_1$ : « le premier candidat est une fille » et $F_2$ : « le deuxième candidat est une fille ».
   a. Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats soient des filles ?
   b. Quelle est la probabilité que le deuxième soit une fille sachant que le premier en est une ?
   c. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat soit une fille ?
2. L'examinateur tire simultanément quatre noms. Soit $X$ le nombre de filles désignées.
   a. Déterminer la loi de $X$.
   b. Calculer $E(X)$.

## Exercice 21

Des gaufrettes sont vendues en paquets : dans $5\,\%$ des cas l'emballage n'est pas intact ; dans $70\,\%$ des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée ; $90\,\%$ des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1. Un client achète un paquet au hasard. On note $I$ : « l'emballage est intact » et $C$ : « au moins une gaufrette est cassée ».
   a. Calculer $p(I)$.
   b. On considère $E$ : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » et $F$ : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ». Exprimer $E$ et $F$ à l'aide de $I$, $\overline{I}$ et $\overline{C}$, puis calculer $p(E)$ et $p(F)$. En déduire $p(\overline{C})$ puis $p(C)$.
2. Les paquets sont vendus par lots de cinq (choix indépendants). Quelle est la probabilité que, dans un lot, au moins quatre paquets aient un emballage intact ? qu'aucune gaufrette ne soit cassée ? (Résultats à $10^{-4}$ près.)

## Exercice 22

Un jeu consiste à extraire simultanément $3$ boules d'une urne contenant $5$ boules rouges et $5$ boules vertes. Si le joueur obtient $3$ rouges (événement $R_3$), il gagne $500$ dinars ; $2$ rouges et $1$ verte ($R_2$), $300$ dinars ; sinon (événement $E$), il ne gagne rien.

1. Montrer que $p(R_2)=\dfrac{5}{12}$ et $p(R_3)=\dfrac{1}{12}$.

2. Soit $X$ le gain du joueur. Donner la loi de $X$ et calculer $E(X)$.
3. On modifie les règles : si $R_3$ ou $R_2$ est réalisé, le joueur ne gagne rien immédiatement mais est qualifié pour le « Banco » ; si $E$ est réalisé, il ne gagne rien et n'est pas qualifié. Le « Banco » consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne : si elle est verte, le joueur empoche $1000$ dinars ; si elle est rouge, il repart avec une prime de consolation de $200$ dinars.
   a. Quelle est la probabilité d'empocher les $1000$ dinars sachant que $R_3$ est réalisé ?
   b. Même question sachant que $R_2$ est réalisé.
   c. En déduire la probabilité d'empocher les $1000$ dinars.
   d. Soit $Y$ le gain dans ce nouveau jeu ($Y \in \{0, 200, 1000\}$). Établir la loi de $Y$.
   e. Calculer $E(Y)$ et comparer avec $E(X)$.

## Exercice 23

1. Soit $P$ la loi de probabilité sur $[0, 2\pi]$ de densité $f(x) = \lambda \sin\frac{x}{2}$.
   a. Déterminer $\lambda$.
   b. Calculer $P\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
2. La durée d'attente $X$, en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$ : $P(X < t) = \int_0^t \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}} dx$ pour $t \geq 0$.
   a. Calculer la probabilité que l'attente soit inférieure à une minute.
   b. Calculer la probabilité que l'attente dépasse trois minutes.

## Exercice 24

1. Soit $P$ la loi de probabilité sur $[1, 10]$ de densité $f(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.
   a. Déterminer $\lambda$.
   b. Calculer $P([2, 5])$.
2. La durée de vie $X$ (en heures) d'un élément mécanique vérifie, pour tout $t \geq 0$, $P(X < t) = 0,002 \int_0^t e^{-0,002x} dx$.
   a. Vérifier que $X$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   b. Calculer $P(X < 400)$.
   c. Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieure à $1000$ heures sachant qu'il a déjà tenu $500$ heures.