COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 16 — Probabilités

◆ **Sommaire**

1. Dénombrement (rappels)
2. Probabilité sur un ensemble fini
3. Probabilités conditionnelles, indépendance
4. Variables aléatoires
5. Lois continues

◆ **Objectifs du chapitre**

– Dénombrer des tirages (successifs avec ou sans remise, simultanés) et calculer des probabilités dans une situation d'équiprobabilité.

– Utiliser les probabilités conditionnelles, un arbre pondéré, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

– Reconnaître des événements indépendants et une loi binomiale.

– Déterminer la loi d'une variable aléatoire, son espérance, sa variance et sa fonction de répartition.

– Utiliser une loi continue (uniforme, exponentielle, ou loi à densité donnée).

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 9 : *Probabilités*).

1 Dénombrement (rappels)

◆ **Théorème**

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

Type de tirage de p éléments	Modèle	Nombre
successifs avec remise	p-uplets	n^p
successifs sans remise	arrangements	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
simultanés	combinaisons	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

◆ **Théorème**

Le nombre de permutations de E est $n!$.

2 Probabilité sur un ensemble fini

◆ Définitions

L'**univers** E est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire ; un **événement** est une partie de E. Une **probabilité** sur E est une application p de $P(E)$ dans $[0,1]$ telle que $p(E)=1$ et $p(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A.

En situation d'**équiprobabilité** : $p(A)=\dfrac{card\,A}{card\,E}$.

◆ Propriétés

$p(\overline{A})=1-p(A)$; $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$; si $A\cap B=\varnothing$, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

3 Probabilités conditionnelles, indépendance

◆ Théorème et définition

Si $p(B)\neq 0$, l'application p_B définie par $p_B(A)=p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ est une probabilité sur E (probabilité de A sachant B). Ainsi $p(A\cap B)=p(B)\,p(A/B)$.

◆ Indépendance

A et B sont indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$; si $p(B)\neq 0$, cela équivaut à $p(A/B)=p(A)$.

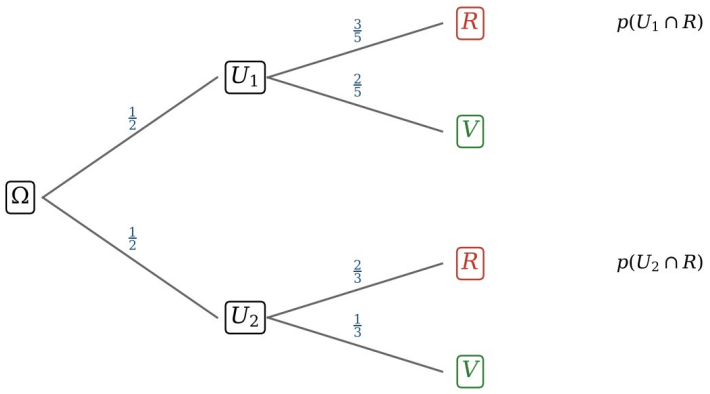
◆ Formule des probabilités totales

Si $B_1,\ldots,B_n$ forment une partition de E avec $p(B_i)\neq 0$:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\,p(A/B_i).$$

◆ Formule de Bayes

$$p(B_k/A)=\frac{p(B_k)\,p(A/B_k)}{\sum_i p(B_i)\,p(A/B_i)}.$$



Arbre pondéré (exercice 2) : la somme des poids issus d'un nœud vaut 1 *; la probabilité d'un chemin est le produit des poids ;* $p(R)$ *est la somme des probabilités des chemins menant à* R.

4 Variables aléatoires

◆ Définitions

Une **variable aléatoire** (aléa numérique) est une application $X : E \to \mathbb{R}$. Si $X(E) = \{x_1, \dots, x_n\}$, la **loi** de X est la donnée des $p_i = p(X = x_i)$, avec $\sum p_i = 1$.

– **Espérance** : $E(X) = \sum x_i p_i$. **Variance** : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$. **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

– **Fonction de répartition :** $F(x) = p(X \leq x)$; c'est une fonction en escalier, croissante, continue à droite, nulle avant x_1 et égale à 1 après x_n.

◆ Propriétés

$E(\alpha X) = \alpha E(X)$, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

◆ Loi binomiale

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues dont le succès a la probabilité p. Le nombre X de succès suit la loi binomiale $B(n, p)$:

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n ; E(X) = np, V(X) = np(1 - p).$$

5 Lois continues

◆ Loi à densité

Une fonction f continue et positive sur un intervalle I, d'intégrale 1 sur I, est une **densité** ; la probabilité

associée est $P([c,d])=\int_c^d f(x)dx$ pour $[c,d]\subset I$. Une valeur isolée a une probabilité nulle.

Loi uniforme sur $[a,b]$: $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, donc $P([c,d])=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$: $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0,+\infty[$;

$$P(X\le t)=1-e^{-\lambda t},\ P(X\ge t)=e^{-\lambda t},\ P(c\le X\le d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}.$$

Elle est **sans vieillissement** : $P(X\ge t+h/X\ge t)=P(X\ge h)$.

◆ **Méthode — modéliser**

Avant tout calcul : préciser l'univers et l'hypothèse d'équiprobabilité (« au hasard », « indiscernables ») ; identifier le type de tirage (ordre ? remise ?) ; en présence d'étapes successives, dresser un **arbre** ; pour « au moins un », passer à l'**événement contraire**.