EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Soit le cube $OABCDEFG$ (arêtes $[OA]$, $[OC]$, $[OD]$ issues de O ; B, E, F, G tels que $OABC$ et $DEFG$ soient des faces, E au-dessus de A et G au-dessus de C). L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. Soit a un réel strictement positif ; L, M, K sont les points définis par $\overrightarrow{OL}=a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{BF}$.

1.
   a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$.
   b. En déduire l'aire du triangle DLM.
   c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
   a. Démontrer que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$.
   b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OK}$. Démontrer que $\lambda=\dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
   c. Déterminer les coordonnées de H.
   d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK=\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles en O et $OA=OB=OC=a$. On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point défini par $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. *Calcul de OH.*
   a. Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$, puis l'aire S du triangle ABC.
   b. Exprimer OH en fonction de V et de S ; en déduire que $OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
4. *Étude du tétraèdre $ABCD$.* L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$.
   b. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH), puis calculer ses coordonnées.

Exercice 3

On considère les points $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1.
   a. Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$.
   b. Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.
2.
   a. Soit P le plan d'équation $x-2y-z+5=0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).
   b. Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées de K et vérifier que K appartient à P.
3. Soit h l'homothétie de centre E qui transforme C en K.
   a. Déterminer le rapport de h.
   b. Le plan P coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$.

Exercice 4

On considère les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

1.
   a. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   c. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Montrer que $OH=\dfrac{4}{3}$.
3. Soit S la sphère de centre O passant par A.
   a. Justifier que l'intersection de S et du plan (ABC) est un cercle ζ de centre H.
   b. Calculer le rayon du cercle ζ.

Exercice 5

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; en déduire l'aire du triangle ABC et une équation du plan (ABC).
2. Calculer la distance de O au plan (ABC) et les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur ce plan.
3. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ de deux façons.
4. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Quel est le volume de l'image du tétraèdre $OABC$ par h ?

Exercice 6

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

1. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

2. Soit P le plan d'équation $2x-y+2z-1=0$. Montrer que P coupe S suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Déterminer les plans parallèles à P et tangents à S.
4. Vérifier que $A(5,-2,3)$ appartient à S et donner une équation du plan tangent à S en A.

Exercice 7

Soit D la droite de représentation paramétrique $x=1+t,\ y=2-t,\ z=2t$ ($t\in\mathbb{R}$) et P le plan d'équation $x+y+z=6$.

1. Montrer que D et P sont sécants et déterminer leur point d'intersection I.
2. Soit $A(1,2,0)$. Déterminer le projeté orthogonal A' de A sur P, la distance de A à P et le symétrique A'' de A par rapport à P.
3. Calculer la distance du point O à la droite D.