COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 15 — Géométrie dans l'espace

Sommaire

1. Produit scalaire
2. Déterminant et produit vectoriel
3. Plans, droites, distances
4. Sphères
5. Translations et homothéties de l'espace

Objectifs du chapitre

– Calculer un produit scalaire, un déterminant et un produit vectoriel à l'aide des composantes.

– Utiliser le produit vectoriel pour obtenir un vecteur normal, une aire, un volume, une distance.

– Écrire une équation de plan et une représentation paramétrique de droite ; étudier les positions relatives.

– Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

– Utiliser translations et homothéties de l'espace (effet sur les distances, les aires et les volumes).

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 6 : *Géométrie dans l'espace*).

1 Produit scalaire

Définition

Si $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ sont non nuls, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\widehat{AOB}$; si l'un des deux est nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Propriétés

– $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

– $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$; $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

– Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire.

– Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2 Déterminant et produit vectoriel

◆ Déterminant

Pour $\vec{u}(a,b,c), \vec{v}(a',b',c'), \vec{w}(a'',b'',c'')$:

$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}.$$

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul.

◆ Produit vectoriel

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ; $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

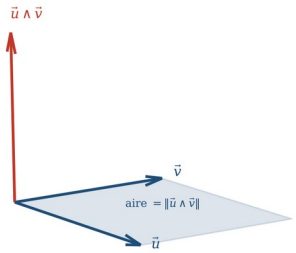
◆ Propriétés et calcul

– $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; le produit vectoriel est bilinéaire ; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

– Composantes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb' ; ca' - ac' ; ab' - ba').$$

– $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.



Le produit vectoriel est normal au plan de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; sa norme est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

◆ Applications métriques

– Aire du parallélogramme $ABCD$: $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$; aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

– Volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$: $|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})|$.

– Volume du tétraèdre $ABCD$: $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$ $\left(= \frac{1}{3} \times \text{aire de base} \times \text{hauteur}\right)$.

– Distance d'un point M à la droite $\Delta(A, \vec{u})$: $d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

3 Plans, droites, distances

◆ Plans

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c) \neq \vec{0}$ a une équation $ax + by + cz + d = 0$. Si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

◆ Distance d'un point à un plan

Si $P : ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(M, P) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

◆ Droites

La droite $D(A, \vec{u})$, avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, admet la représentation paramétrique $x = x_0 + \lambda\alpha$, $y = y_0 + \lambda\beta$, $z = z_0 + \lambda\gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

4 Sphères

◆ Équation

La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Réciproquement, l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est une sphère, un point ou l'ensemble vide, selon le signe de $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \delta$.

Intersection avec un plan P. Soit $h = d(\Omega, P)$ et H le projeté orthogonal de Ω sur P. L'intersection est vide si $h > R$, réduite à $\{H\}$ si $h = R$ (plan tangent), et c'est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ si $h < R$.

5 Translations et homothéties de l'espace

◆ Théorème

Translation $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; écriture $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$. Elle conserve les distances, le produit scalaire, le parallélisme, l'orthogonalité et les milieux ; l'image d'une droite (d'un plan) est une droite (un plan) parallèle ; l'image d'une sphère est une sphère de même rayon.

Homothétie $h_{(I,k)}$, $k \neq 0$: $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$; pour tous M, N, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Écriture : $x' = kx + (1-k)a$, etc., si $I(a,b,c)$. Elle multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$; l'image d'un plan est un plan parallèle ; l'image d'une sphère de rayon R est une sphère de rayon $|k|R$.

◆ Méthode

Méthode — projeté orthogonal H d'un point M sur un plan P de vecteur normal $\vec{n}$. On écrit $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$ (car $(MH) \perp P$), puis on traduit $H \in P$ pour obtenir t. On en déduit H et $MH = |t|\|\vec{n}\| = d(M,P)$.