EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 14 — Arithmétique

Exercice 1

1. Quel est le reste de la division de 32^{45} par 7 ?
2. Quel est le reste de la division de 24^{40} par 5 ?
3. Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de 7^{77}.
4. Déterminer le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de 444^{44^4}.

Exercice 2

p et q sont des entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.
2. En déduire que, pour que 2^n-1 soit premier, il faut que n soit premier.
3. Prouver, à l'aide d'un contre-exemple, que la condition « n est premier » n'est pas suffisante.

Exercice 3

Montrer que, pour tout couple (x, y) d'entiers relatifs, si x^2+y^2 est divisible par 7, alors x et y sont divisibles par 7.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^2 \equiv 0\,[8]$ ou $n^2 \equiv 4\,[8]$ si n est pair, et que $n^2 \equiv 1\,[8]$ si n est impair.

Exercice 5

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10}+1$ par 10 ? En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10}+1$ par 10.
2. Soit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 9$. Montrer que 10 divise $r^{10}+1$ si et seulement si $r \in \{3, 7\}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10}+1$.

Exercice 6

On se propose de déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation (E) : $2^x - 3^y = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   a. Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b. Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k}+1$, puis de $3^{2k+1}+1$, par 8.
2. Soit (x, y) un couple solution de (E). Montrer, à l'aide de 1, que $x \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de (E).

Exercice 7

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$:
$$5^{2^{n-2}} - 1 = 4\left(1+5^{2^0}\right)\left(1+5^{2^1}\right)\cdots\left(1+5^{2^{n-3}}\right).$$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$ et 2^{n+1} ne divise pas $5^{2^{n-2}} - 1$.

Exercice 8

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier divisible par 2^n.

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$;
2. 9 divise $4^n - 1 - 3n$.

Exercice 10

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 divise $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ si et seulement si 4 ne divise pas n.

Exercice 11

1. On considère l'équation $(E) : 17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.
   a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$.
   b. Déterminer une solution particulière de (E).
   c. En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E).
   d. Montrer que le PGCD de x et y, pour (x, y) solution de (E), vaut 1 ou 2.
   e. Déterminer les couples (x, y) solutions de (E) tels que $x \wedge y = 2$.
   f. Déterminer le couple (x_0, y_0) solution de (E) tel que $x_0 \wedge y_0 = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$.
2. Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier, qui recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.
   a. On note N le nombre de pièces du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.
   b. Écrire la relation liant x et y.
   c. En utilisant 1.c, déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide de se débarrasser des six pirates restants.

Exercice 12

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : 11n - 24m = 1$.
   a. Justifier que cette équation admet au moins une solution.
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (1).
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
2.

a. Justifier que $10^p - 1$ divise $10^{pk} - 1$ pour tous k, $p \in \mathbb{N}^*$.

b. (n, m) désignant un couple d'entiers naturels solution de (1), montrer que $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.

c. En déduire l'existence de deux entiers N et M tels que $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Exercice 13

1. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3x - 8y = 5$. Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.

a. Soit n, x, y trois entiers tels que $n = 3x + 2$ et $n = 8y + 7$. Montrer que (x, y) est solution de (E).

b. On considère le système (S) : $n \equiv 2\,[3]$ et $n \equiv 7\,[8]$, où n est un entier. Montrer que n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 23\,[24]$.

3.

a. Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b. Vérifier que 1991 est solution de (S) et montrer que $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice 14

Table de correspondance utilisée aux questions 2 à 4 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1.

a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26. On code un message ainsi : à chaque lettre on associe un entier entre 0 et 25 (A $= 0$, B $= 1$, ..., Z $= 25$) ; la lettre associée à n est codée par la lettre associée à $\varphi(n)$. On sait que F est codée par K et T par O.

a. Montrer que $5a + b \equiv 10\,[26]$ et $19a + b \equiv 14\,[26]$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, vérifiant ce système.

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0\,[26]$. En déduire que deux lettres distinctes sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose toujours $a=17$ et $b=3$.
   a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n)+9-n$ par 26.
   b. En déduire un procédé de décodage.
   c. Décoder le message « KTGZDO ».

Exercice 15

Soit (f_n) la suite définie par $f_0=0$, $f_1=1$ et $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

1. 2 divise f_n si et seulement si 3 divise n ;
2. 3 divise f_n si et seulement si 4 divise n ;
3. 4 divise f_n si et seulement si 6 divise n.

Exercice 16

Soit a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

1. 2^a-1 divise $2^{ab}-1$;
2. $(2^a-1)\wedge(2^b-1)=2^{a\wedge b}-1$;
3. si 2^a-1 est premier, alors a est premier.

Exercice 17

On appelle nombres de Fermat les entiers $F_n=2^{2^n}+1$, $n\in\mathbb{N}$.

Partie A. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, F_n divise $2^{F_n}-2$.

Partie B. On se propose de démontrer que, si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 2.

I. Soit b et p deux entiers naturels non nuls.

1. Factoriser $b^{2p+1}-b$. En déduire que $b^{2p+1}-b$ et $b^{2p+1}+1$ sont divisibles par $b+1$.
2. Démontrer que, pour tous entiers a, m, p non nuls, $a^{m(2p+1)}+1$ est divisible par a^m+1.

II.

1.
   a. Soit n un entier naturel non nul tel que 2^n+1 soit premier. Démontrer par l'absurde que n n'a pas de diviseur impair autre que 1.
   b. Conclure.
2.
   a. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que F_n ne soit pas premier.
   b. Sierpiński a démontré que tout nombre de Fermat F_n non premier admet un diviseur de la forme $k\times 2^{n+2}+1$, où k est un entier naturel non nul. Vérifier que cela correspond à l'exemple précédent.

Exercice 18

Soit p un nombre premier et $E_p=\{1,2,\ldots,p-1\}$.

1. Montrer que tout élément de E_p est premier avec p.

2. Montrer que, pour tout $a \in E_p$, il existe un unique $b \in E_p$ tel que $ab \equiv 1\,[p]$.
3. Déterminer les éléments a de E_p tels que $a^2 \equiv 1\,[p]$.
4. Montrer que $(p-1)! \equiv p-1\,[p]$.
5. En déduire que, pour tout nombre premier p, $(p-1)!+1$ est divisible par p.

Exercice 19

Soit a un entier impair et n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Établir que $a^{2^{n-2}} \equiv 1\,[2^n]$.

Exercice 20

Montrer que, pour tout entier $b \geq 1$, le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas premier.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$.

1. Montrer que $s_n = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$.
2. En déduire que s_n est un entier divisible par $2n+1$.

Exercice 22

1. Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que, si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système d'inconnues a et b : $(3a+5b)(a+2b) = 1276$ et $ab = 2m$, où m est le PPCM de a et b.

Exercice 23

1. Soit a un entier naturel. Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. Soit a et b des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrer que, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

Exercice 24

Montrer que les entiers suivants ne sont pas premiers :

1. $n^4 - n^2 + 16,\ n \in \mathbb{Z}$;
2. $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$;
3. $2^{4n+2} + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 25

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$;
2. $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = 1$;

3. $\left(n^2+1\right) \wedge \left((n+1)^2+1\right) \in \{1,5\}$.

Exercice 26

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

1. 42 divise $n^7 - n$;
2. 2730 divise $n^{13} - n$;
3. $2^{15} - 2^3$ divise $n^{15} - n^3$.

Exercice 27

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35}$ est un entier.

Exercice 28

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. Démontrer que, si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer les couples (a,b) tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2 = 1$; un tel couple est appelé solution.
   a. Déterminer a lorsque $a = b$.
   b. Vérifier que $(1,1)$, $(2,3)$ et $(5,8)$ sont des solutions.
   c. Montrer que, si (a,b) est solution et $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.
3.
   a. Montrer que, si (x,y) est une solution différente de $(1,1)$, alors $(y-x,x)$ et $(y,y+x)$ sont aussi des solutions.
   b. Déduire de 2.b trois nouvelles solutions.
4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, (a_n, a_{n+1}) est solution. En déduire que a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 29

On pourra utiliser le résultat suivant : si $a \wedge b = 1$, alors $a^2 \wedge b^2 = 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer $S_n \wedge S_{n+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $4S_n = n^2(n+1)^2$.
2. On suppose n pair : $n = 2k$, $k \geq 1$.
   a. Démontrer que $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \times \left(k^2 \wedge (k+1)^2\right)$.
   b. Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.
3. On suppose n impair : $n = 2k+1$, $k \geq 0$.
   a. Démontrer que $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.

4. En déduire qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 30

1. Pour $a=2$, puis pour $a=3$, déterminer un entier naturel non nul n tel que $a^n \equiv 1\,[7]$.
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que $a^6 \equiv 1\,[7]$.
   b. On appelle ordre de a modulo 7 le plus petit entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv 1\,[7]$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1\,[7]$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
3. À tout entier naturel n, on associe $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6\,[7]$.

Exercice 31

Partie A.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1\,[3]$.
2. Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier naturel k, $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1\,[p]$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $4^n \equiv 1\,[p]$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1\,[p]$, et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1\,[p]$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver que $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est un multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 32

1. Calculer $\left(4^5 - 1\right) \wedge \left(4^6 - 1\right)$.
2. $\left(u_n\right)$ est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$. Calculer u_2, u_3 et u_4.
3.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, $u_n \wedge u_{n+1}$.
4. Soit $\left(v_n\right)$ la suite définie par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.
   a. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, $\left(4^n - 1\right) \wedge \left(4^{n+1} - 1\right)$.