EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 13 — Coniques

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et p désigne un réel strictement positif.

Exercice 1

Soit D la droite d'équation $x=-\frac{p}{2}$ et F le point de coordonnées $\left(\frac{p}{2};0\right)$. Soit $P=\{M(x;y)/MF=MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $M\in P$ équivaut à $y^2=2px$.

Exercice 2

1. Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice :
   a. $y^2=4x$; b. $x^2=6y$; c. $y^2=-8x$; d. $x^2=-3y$.
2. Montrer que les courbes P_1, P_2 et P_3 d'équations respectives $y^2=5x-1$, $x^2-4y+2x-1=0$ et $y^2-x+y=0$ sont des paraboles dont on déterminera les éléments caractéristiques.
3. Vérifier que $A(2;1)\in P_3$ et écrire une équation de la tangente T à P_3 en A.
4. Déterminer les coordonnées du point B de P_3 tel que la tangente à P_3 en B soit perpendiculaire à T.

Exercice 3

Soit P la parabole d'équation $y^2=2px$, de foyer F et de directrice D. Une droite variable Δ passant par F coupe P en deux points M et M'.

1. Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$.
2. Montrer que $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FM'}=\frac{2}{p}$.
3. On désigne par T et T' les tangentes à P respectivement en M et en M'.
   a. Montrer que T est perpendiculaire à T'.
   b. Soit A le point d'intersection de T et T'. Montrer que $A\in D$.

Exercice 4

Soit P la parabole d'équation $y^2=2px$. Soit M et M' deux points de P, distincts de O, tels que le triangle MOM' soit rectangle en O. Montrer que la droite (MM') coupe l'axe focal de P en un point fixe que l'on déterminera.

Exercice 5

Soit P la parabole d'équation $y^2=2px$, de foyer F et de directrice D.

1. À quelle condition la droite d'équation $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) est-elle tangente à P ?

2. La tangente en un point M de P, distinct de O, coupe l'axe de symétrie en un point A. Montrer que la tangente au sommet de P passe par le milieu I de $[MA]$.
3. Soit T_1 et T_2 deux tangentes perpendiculaires à P. Montrer que $\frac{1}{d(F,T_1)^2}+\frac{1}{d(F,T_2)^2}=\frac{4}{p^2}$, où $d(F,T)$ désigne la distance du point F à la droite T.

Exercice 6

Montrer que l'orthocentre de tout triangle formé par trois tangentes à une parabole appartient à la directrice de cette parabole.

Exercice 7

Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $c^2=a^2+b^2$. On donne le point $F(c;0)$ et la droite D d'équation $x=\frac{a^2}{c}$. Soit $H=\{M(x;y)/a\,MF=c\,MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Montrer que $M\in H$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
2. Prouver qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes, $\frac{MF'}{MF}=\frac{MH'}{MH}$ pour tout $M\in H$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF-MF'|=2a$?

Exercice 8

1. Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, une équation de chacune de ses directrices, ses asymptotes et son excentricité :
   a. $4x^2-36y^2=121$; b. $-9x^2+4y^2=196$; c. $2x^2-2y^2=1$.
2. Identifier les ensembles des points $M(x;y)$ vérifiant :
   a. $x=\frac{2}{\cos t}$ et $y=3\tan t, t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$;
   b. $x=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$ et $y=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), t\in\mathbb{R}^*$;
   c. $x=\frac{1}{\cos 2t}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t, t\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Exercice 9

Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1. À quelle condition la droite d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$) est-elle tangente à H ?
2. Quel est l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à H perpendiculaires ?
3.
   a. Soit P un point du plan de coordonnées $(u;v)$. Discuter le nombre de tangentes à H passant par P.

b. Dans le cas où il existe deux tangentes, écrire une équation de la droite qui joint leurs points de contact.

Exercice 10

Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, F et F' ses foyers. Soit T une tangente à H. Calculer, en fonction de a et b, le produit $d(F,T)\times d(F',T)$.

Exercice 11

Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a^2=b^2+c^2$. On donne le point $F(c;0)$ et la droite D d'équation $x=\frac{a^2}{c}$. Soit $\xi=\{M(x;y)/a\,MF=c\,MH\}$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Montrer que $M\in\xi$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
2. Prouver qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes, $\frac{MF'}{MF}=\frac{MH'}{MH}$ pour tout $M\in\xi$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$?

Exercice 12

1. Pour chacune des courbes suivantes, déterminer, s'il s'agit d'une ellipse, ses foyers, ses sommets, une équation de chacune de ses directrices et son excentricité :
   a. $4x^2+36y^2=121$; b. $9x^2+4y^2=196$; c. $2x^2+2y^2=1$.
2. Identifier les ensembles des points $M(x;y)$ vérifiant :
   a. $x=5\cos t$ et $y=3\sin t$, $t\in\mathbb{R}$;
   b. $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ et $y=\frac{e^t}{e^{2t}+1}$, $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit ξ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>b$, et M un point de ξ d'abscisse x_0.

1. Déterminer ses foyers F et F', ses sommets, une équation de chacune de ses directrices et son excentricité.
2. Calculer MF et MF', et vérifier que $MF+MF'=2a$.
3. Une droite variable Δ passant par F coupe ξ en M et M'. Prouver que $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FM'}=\frac{2a}{b^2}$.
4. La droite (MF') recoupe ξ en N (et la droite (MF) la recoupe en M'). Montrer que $\frac{FM}{FM'}+\frac{F'M}{F'N}=\frac{4a^2-2b^2}{b^2}$.

Exercice 14

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation :

1. $x^2+4y^2+2x=1$;
2. $x^2-8y^2+2x-16y=1$;
3. $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0, m\in\mathbb{R}$;
4. $y^2-4y=2x-\dfrac{x^2}{m}, m\in\mathbb{R}^*$.

Exercice 15

On considère deux points distincts F et F' du plan orienté. On note O le milieu de $[FF']$, Δ la médiatrice de ce segment et $c=OF$. On note A et B les points de Δ tels que $OA=OB=c$ et $\left(\overrightarrow{OF'},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Soit D et D' les droites symétriques de Δ par rapport à F et à F'.

1.
   a. On considère les points $P=r(A)$ et $Q=s(A)$. Prouver que $r(Q)=B$. Déterminer la nature du quadrilatère $APQB$ et le tracer.
   b. Déterminer les images respectives du segment $[AB]$ par s, par r et par $r\circ s$.
   c. À tout point N du segment $[AB]$, on associe les points $H=s(N)$, $I=r(N)$ et $J=r(H)=(r\circ s)(N)$. Déterminer la nature du quadrilatère $NIHJ$ et le tracer.
2. On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI.
   a. Montrer que, pour tout point M du plan, $MH^2+MN^2=2\left(MF^2+NF^2\right)$.
   b. En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MH^2-2MF^2=0$.
3. On note K le projeté orthogonal de H sur Δ et on pose $\alpha=ON$, où $0\leq\alpha\leq c$. Exprimer NK en fonction de α, puis NF et NI en fonction de α et de c. En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2, distincts ou confondus.
4. Prouver que $\dfrac{M_1F}{M_1H}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que, lorsque N parcourt le segment $[AB]$, les points M_1 et M_2 appartiennent à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F. Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par M, N, P trois points distincts d'affixes respectives m, n, p.

1. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le complexe $i\dfrac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.
2. Dans cette question, M, N, P ont pour affixes respectives z, z^2, z^4.
   a. Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?
   b. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ tels que le triangle MNP soit rectangle en N est la conique Γ d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2=\dfrac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

3. Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).
4. Représenter Γ avec ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.

Exercice 17

Soit ζ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $13x^2+13y^2-24xy-25=0$ dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Écrire l'expression complexe de r.
2. Déterminer une équation de la courbe $r(\zeta)$. Préciser sa nature et ses éléments géométriques.
3. En déduire la nature et les éléments géométriques de ζ.

Exercice 18

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $z^2-(1+i)^2=\overline{z}^2-(1-i)^2$.

1. Déterminer et construire E.
2. Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que $[z-(1+i)][\overline{z}-(1-i)]=8$.
3. Vérifier qu'il existe un point de $E\cap F$ où les deux courbes ont la même tangente.

Exercice 19

À tout point M de coordonnées $(x\,;y)$, on associe son affixe $z=x+iy$. On appelle ζ l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie

$$(*)\ \left|\frac{z+i\overline{z}}{2}\right|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|.$$

1. Démontrer que ζ admet pour équation $x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. On pose $\vec{e}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{e}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$. Montrer que $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est un repère orthonormé et déterminer une équation de ζ dans ce repère.
3. Quelle est la nature de ζ et quels sont ses éléments caractéristiques ?
4. Que signifie géométriquement la relation $(*)$? Construire ζ.

Exercice 20

Dans le plan orienté par un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe H d'équation $x^2-4y^2-2x-3=0$.

1. Montrer que H est une hyperbole ; déterminer ses sommets et ses asymptotes.
2.
   a. Vérifier que le point $M_0(1+2\sqrt{2}\,;1)$ appartient à H.
   b. Donner une équation de la tangente (T) à H en M_0.
3. Soit θ un réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(E_\theta):(\cos^2\theta)z^2-2(\cos^2\theta+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0.$$

a. Résoudre l'équation (E_θ).

b. Soit M' et M'' les images des solutions z' et z''. Montrer que M' et M'' décrivent une branche B de l'hyperbole H.