COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 13 — Coniques

◆ **Sommaire**

1. Définition générale
2. Parabole
3. Ellipse
4. Hyperbole
5. Courbes d'équation Ax2+By2+Cx+Dy+E=0

◆ **Objectifs du chapitre**

– Utiliser la définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité.

– Passer de l'équation réduite d'une parabole, d'une ellipse ou d'une hyperbole à ses éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices, excentricité, asymptotes), et réciproquement.

– Réduire une équation $A x^2 + B y^2 + Cx + Dy + E = 0$ par complétion des carrés et reconnaître la courbe.

– Écrire l'équation d'une tangente et exploiter les propriétés focales (propriétés bifocales, cordes focales).

– Reconnaître une conique donnée par une représentation paramétrique, par une condition complexe ou après une rotation du repère.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 5 : *Coniques*).

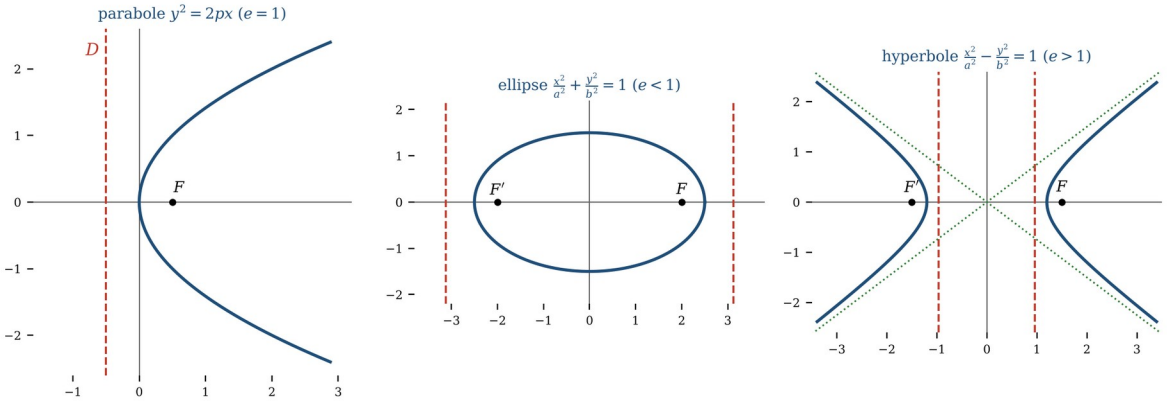
1 Définition générale

◆ **Définition**

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif. Pour tout point M, on note H son projeté orthogonal sur D. On appelle **conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e** l'ensemble des points M tels que

$$\frac{MF}{MH} = e \text{, c'est-à-dire } MF = e\, d(M, D).$$

C'est une **parabole** si $e = 1$, une **ellipse** si $0 < e < 1$, une **hyperbole** si $e > 1$. La perpendiculaire à D passant par F est l'**axe focal** ; c'est un axe de symétrie de la conique.



Les trois types de coniques, avec leurs foyers et leurs directrices (en pointillés rouges).

2 Parabole

◆ Théorème

Soit P une parabole de foyer F, de directrice D, et K le projeté orthogonal de F sur D. Le **sommet** S de P est le milieu de $[FK]$; le réel $p = FK$ est le **paramètre** de P.

Dans le repère orthonormé $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, P a pour équation

$$y^2 = 2px, F\left(\frac{p}{2}; 0\right), D : x = -\frac{p}{2}.$$

De même, $x^2 = 2py$ est la parabole de foyer $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ et de directrice $y = -\frac{p}{2}$.

◆ Tangente

La tangente à la parabole $y^2 = 2px$ en $M_0(x_0; y_0)$ a pour équation $y_0 y = p(x + x_0)$; celle à $x^2 = 2py$ a pour équation $x_0 x = p(y + y_0)$. La tangente au sommet est l'axe $x = 0$ (respectivement $y = 0$).

3 Ellipse

◆ Théorème

Soit $a > b > 0$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une **ellipse** de centre O, d'axe focal $\left(O, \vec{i}\right)$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$. Elle admet deux couples foyer–directrice : $F(c; 0)$ et $D : x = \frac{a^2}{c}$; $F'(-c; 0)$ et $D' : x = -\frac{a^2}{c}$.

Ses **sommets** sont $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$ (sommets principaux) et $B(0; b)$, $B'(0; -b)$; a est le demi-grand

axe et b le demi-petit axe.

Si $0<a<b$, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a pour axe focal $(O,\vec{j})$: $c=\sqrt{b^2-a^2}$, foyers $(0;\pm c)$, directrices $y=\pm\frac{b^2}{c}$, excentricité $\frac{c}{b}$.

Tangente en $M_0(x_0;y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

◆ **Propriétés métriques (démontrées aux exercices 11 et 13)**

Pour tout point $M(x;y)$ de l'ellipse :

$$MF=a-ex,\ MF'=a+ex,\ MF+MF'=2a.$$

Réciproquement, l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$ (avec $2a>FF'$) est l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

4 Hyperbole

◆ **Théorème**

Soit $a>0$, $b>0$ et $c=\sqrt{a^2+b^2}$. L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

est une **hyperbole** de centre O, d'axe focal $(O,\vec{i})$ et d'excentricité $e=\frac{c}{a}$. Elle admet deux couples foyer–directrice : $F(c;0)$ et $D:x=\frac{a^2}{c}$; $F'(-c;0)$ et $D':x=-\frac{a^2}{c}$.

Ses **sommets** sont $S(a;0)$ et $S'(-a;0)$. Elle admet deux **asymptotes** d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

L'hyperbole $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a pour axe focal $(O,\vec{j})$: sommets $(0;\pm b)$, foyers $(0;\pm c)$, directrices $y=\pm\frac{b^2}{c}$, excentricité $\frac{c}{b}$, mêmes asymptotes.

Tangente en $M_0(x_0;y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

Lorsque $a=b$, l'hyperbole est dite **équilatère** : ses asymptotes sont perpendiculaires et $e=\sqrt{2}$. Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY=k$ ($k\neq0$).

◆ **Propriétés métriques (démontrées à l'exercice 7)**

Pour tout point $M(x\,;y)$ de l'hyperbole : $MF=|ex-a|$ et $MF'=|ex+a|$, d'où $|MF-MF'|=2a$. Réciproquement, l'ensemble des points M tels que $|MF-MF'|=2a$ (avec $2a<FF'$) est l'hyperbole de foyers F et F'.

5 Courbes d'équation Ax2+By2+Cx+Dy+E=0

◆ **Méthode — reconnaître la courbe**

On complète les carrés pour se ramener, dans un repère translaté d'origine Ω, à une équation réduite. Selon le signe de AB :

Signe de AB	Ensemble possible
$AB=0$ **(un seul carré)**	parabole, deux droites parallèles, une droite ou l'ensemble vide
$AB>0$	ellipse, cercle, un point ou l'ensemble vide
$AB<0$	hyperbole ou deux droites sécantes

◆ **Méthode**

Les éléments (foyers, sommets, directrices, asymptotes) se lisent dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, puis se traduisent dans le repère initial avec $X=x-x_\Omega$, $Y=y-y_\Omega$.

◆ **Méthode — représentations paramétriques usuelles**

- $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($t\in\mathbb{R}$) décrit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (on utilise $\cos^2 t+\sin^2 t=1$).
- $x=\frac{a}{\cos t}$, $y=b\tan t$ décrit une partie de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (on utilise $\frac{1}{\cos^2 t}-\tan^2 t=1$).

Il faut toujours préciser **quelle partie** de la courbe est décrite (étude des signes, de l'image des fonctions coordonnées).

◆ **Attention**

Dans $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, l'axe focal est porté par le **plus grand** des deux dénominateurs. Pour une hyperbole, il est porté par la variable affectée du signe +, quelle que soit la taille des dénominateurs.