EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 12 — Similitudes du plan

Exercice 1

On considère un triangle équilatéral ABI tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1. Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.
   a. Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
   b. Soit $C=R(B)$. Montrer que I est le milieu de $[AC]$.
2. À tout point M de $[AB]$, distinct de A et de B, on associe le point M' de $[IC]$ tel que $AM=\mathrm{IM}'$. Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.
3. Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.
   a. Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
   b. Montrer que $S(B)=I$ et construire le point $A'=S(A)$.
   c. Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

Exercice 2

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan, $A(1;1)$ et $B(0;2)$.

1. Soit $g=t_{\overrightarrow{BO}}\circ R_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$.
   a. Déterminer $g(B)$ et $g(O)$.
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.
2. Soit $S=g\circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$.
   a. Déterminer $S(A)$, puis la nature de S.
   b. Soit $OIAJ$ le carré de centre K avec $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Déterminer $S(B)$, puis construire l'image du carré $OIAJ$ par S.

Exercice 3

On considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit H le milieu de $[BC]$, I le milieu de $[AC]$ et Δ la médiatrice de $[BC]$. On désigne par S la similitude directe de centre A qui envoie B sur I. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par S.

1. Déterminer l'angle et le rapport de S.
2. Construire le point J, antécédent de B par S.
3. Soit N l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe Δ.

a. Montrer que $BM' = BN$ si et seulement si $JM = 2CM$.

b. En déduire l'ensemble des points M tels que $BM' = BN$.

Exercice 4

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 2AB$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par F le projeté orthogonal de A sur (BC), $I = S_{(AB)}(F)$ et $J = S_{(AC)}(F)$.

1.

a. Montrer que $(BI) \perp (AI)$ et $(CJ) \perp (AJ)$.

b. Caractériser $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et en déduire que A est le milieu de $[IJ]$.

2. Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C.

a. Déterminer le rapport et l'angle de S.

b. Montrer que F est le centre de S.

c. Montrer que $S(I) = J$. En déduire que $CJ = IJ$.

3. Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en F et F en J.

a. Déterminer le rapport de σ.

b. Soit Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\overrightarrow{\Omega I}$.

c. Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\overrightarrow{\Omega I}$. Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$.

Exercice 5

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB = 2AC$. Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtés du triangle. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' ; elle coupe D en I et D' en J.

1. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2.

a. Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$.

b. En déduire $S(J)$.

c. Montrer que le cercle de diamètre $[IJ]$ passe par Ω.

Exercice 6

OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2.

a. Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

b. Soit J le projeté orthogonal de O sur (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de f.

3. Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.
   a. Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$.
   b. Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.
4. Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.
   a. Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.
   b. Montrer que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice 7

Soit ABC un triangle non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. À tout point M de la droite (AB), distinct de B, on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan ouvert de bord (BC) et $BM = CN$.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(B) = C$ et $r(M) = N$ pour tout point M de (AB) distinct de B. Préciser une mesure de son angle et construire son centre I.
2. Soit O le milieu de $[BC]$, $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI), h l'homothétie de centre I et de rapport 2, et $f = h \circ S_{(OI)} \circ r$.
   a. Déterminer $f(B)$ et $f(I)$.
   b. Démontrer que f est une similitude indirecte dont on précisera l'axe, le centre et le rapport.
   c. Soit M' l'image de M par f. Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M décrit (AB) privée de B.
   d. Soit H le milieu de $[MN]$. Déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit (AB) privée de B.

Exercice 8

Soit D une droite, O et M deux points symétriques par rapport à D, et M' un point distinct de O et de M. On désigne par s la similitude indirecte de centre O, de rapport $k \neq 1$, envoyant M sur M'. Soit ζ un cercle de centre Ω passant par O et M, et $\zeta' = s(\zeta)$.

1. Construire le centre Ω' de ζ'.
2. En déduire la construction de ζ'.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$. Donner, dans chacun des cas suivants, la nature de f et ses éléments caractéristiques.

a. $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z + 1 + 2i$; b. $z' = -2z + 1 + 2i$; c. $z' = (1+i)z + 1 + 2i$; d. $z' = (1+i)\bar{z} + 1 + 2i$.

Exercice 10

Soit s la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1 - i$. Répondre par vrai ou faux, en justifiant.

1. s a pour écriture complexe $z' = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} z + 1 - i$.
2. L'image par s de la droite D d'équation $x + y = \sqrt{2}$ est la droite D' d'équation $y = \sqrt{2}$.
3. La réciproque s^{-1} de s a pour écriture complexe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} z - 1$.

Exercice 11

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; I désigne le milieu de $[AB]$. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

Partie A. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Soit S une similitude directe d'écriture $z' = az + b$ $(a \neq 0)$.

1. Déterminer a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
2. Soit T la similitude directe d'écriture $z' = \frac{-i\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$. Déterminer le rapport et l'angle de T.
3. Montrer que T transforme B en I.
4. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.
5. Montrer que le centre Ω de T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Partie B. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).
2.
   a. Démontrer que, pour tout point M, $MD^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{BD}$, où J est un point que l'on précisera.
   b. Déterminer l'ensemble (E).
   c. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On considère l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$z' = -(\sqrt{3} + i) z - 1 + i(1 + \sqrt{3}).$$

1. Montrer que f est une similitude directe de centre Ω d'affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} i$. Calculer ΩM_0 et donner une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$ définie par $M_{n+1} = f(M_n)$; on note z_n l'affixe de M_n.
   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

c. Calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4.

a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs. Vérifier que le couple $(-5\,;-3)$ est solution, puis résoudre (E).

b. Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

c. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 13

Soit s_1, s_2 et s_3 les similitudes définies par :

– s_1 associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{-1+i}{2}z + \dfrac{3-i}{2}$;

– s_2 est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle π ;

– s_3 associe à tout point $M(x\,;y)$ le point $M'(x'\,;y')$ tel que $x' = -x + y - 1$ et $y' = -x - y + 2$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = s_1 \circ s_2$ et de $g = s_1 \circ s_3$.

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 5 cm). A, B, C désignent les points d'affixes respectives $1-i$, i et -1. On note g l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{1 - i + z + iz}{3}.$$

1.

a. Déterminer $g(B)$.

b. On note I le milieu de $[BC]$. Prouver que les points O, A, I sont alignés, et placer les points O, A, B, C, I sur une figure.

2.

a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.

b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.

3.

a. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI})$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).

b. Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).

c. En déduire que les points I, O, O', A sont alignés.

4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$.

Exercice 15

On considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

1. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) [2\pi]$.
   b. Montrer que E est sur la droite (BD). On admettra que E est sur le segment $[BD]$.
   c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.
2.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right) [2\pi]$, puis que $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$.
   b. Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par S'.
   c. Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$.
3. Démontrer la relation $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée (astronome et mathématicien grec du IIe siècle), qui l'utilisait pour calculer des longueurs de cordes, ancêtres de nos rapports trigonométriques.