COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 12 — Similitudes du plan

◆ Sommaire

1. Homothéties (rappels et compléments)
2. Similitudes : définition et propriétés
3. Similitudes directes, similitudes indirectes
4. Similitudes directes
5. Similitudes indirectes

◆ Objectifs du chapitre

– Reconnaître une homothétie, une similitude directe, une similitude indirecte et en donner les éléments caractéristiques (centre, rapport, angle ou axe).

– Utiliser l'unicité de la similitude directe (ou indirecte) qui envoie deux points distincts sur deux points donnés.

– Déterminer le centre d'une similitude par une méthode géométrique (cercles, droites images) ou par le calcul.

– Passer de l'écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ aux éléments caractéristiques, et réciproquement.

– Exploiter une similitude pour établir des rapports de longueurs, des angles, des alignements et des orthogonalités.

Le plan P est orienté. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 4 : *Similitudes*).

1 Homothéties (rappels et compléments)

◆ Définition

Soit I un point et k un réel non nul. L'**homothétie** de centre I et de rapport k, notée $h_{(I,k)}$, associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

◆ Théorème (propriété caractéristique)

Soit k un réel non nul et différent de 1. Une application f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M, N d'images M', N' : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

◆ **Propriétés**

– Toute homothétie conserve les mesures des angles orientés.

– La composée de deux homothéties de rapports k_1 et k_2 est une homothétie de rapport $k_1 k_2$ si $k_1 k_2 \neq 1$, une translation si $k_1 k_2 = 1$.

– La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ (dans un ordre quelconque) est une homothétie de rapport k.

– **Écriture complexe.** f est une homothétie de rapport $k \neq 1$ si et seulement si $z' = kz + b$; son centre a pour affixe $\dfrac{b}{1-k}$.

2 Similitudes : définition et propriétés

◆ **Définition**

Soit k un réel strictement positif. On appelle **similitude de rapport** k toute application f du plan dans lui-même telle que, pour tous points A, B d'images A', B' : $A'B' = k\,AB$.

Les isométries sont les similitudes de rapport 1 ; une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

◆ **Théorème 1**

– La composée de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport kk'.

– Une application est une similitude si et seulement si elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

– Pour tous points A, B, C, D d'images A', B', C', D' par une similitude de rapport k : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

◆ **Propriétés**

Une similitude f de rapport k :

– est une bijection ; sa réciproque est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$;

– conserve les angles géométriques, l'orthogonalité, l'alignement, le barycentre (donc le milieu) ;

– transforme un segment en un segment, une droite en une droite, un cercle de centre Ω et de rayon R en un cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon kR ; elle multiplie les aires par k^2.

Deux similitudes qui coïncident en trois points non alignés sont égales.

3 Similitudes directes, similitudes indirectes

◆ Définition

Une similitude est **directe** si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement ; elle est **indirecte** si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Une similitude directe conserve les mesures des angles orientés ; une similitude indirecte les change en leurs opposées.

◆ Théorème 2

– La composée de deux similitudes de même nature est directe ; la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est indirecte. La réciproque d'une similitude a la même nature qu'elle.

– **Unicité.** Soit A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Il existe une **unique similitude directe** et une **unique similitude indirecte** qui envoient A sur C et B sur D ; leur rapport est $\dfrac{CD}{AB}$.

4 Similitudes directes

◆ Théorème et définition (angle)

Soit f une similitude directe. Pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$ d'images A', B', C', D' :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right) [2\pi].$$

Une mesure θ de cet angle est appelée **angle** de f. Si f et g ont pour angles θ et θ', alors $f \circ g$ a pour angle $\theta + \theta'$ et f^{-1} a pour angle $-\theta$.

◆ Théorème 3 (centre et forme réduite)

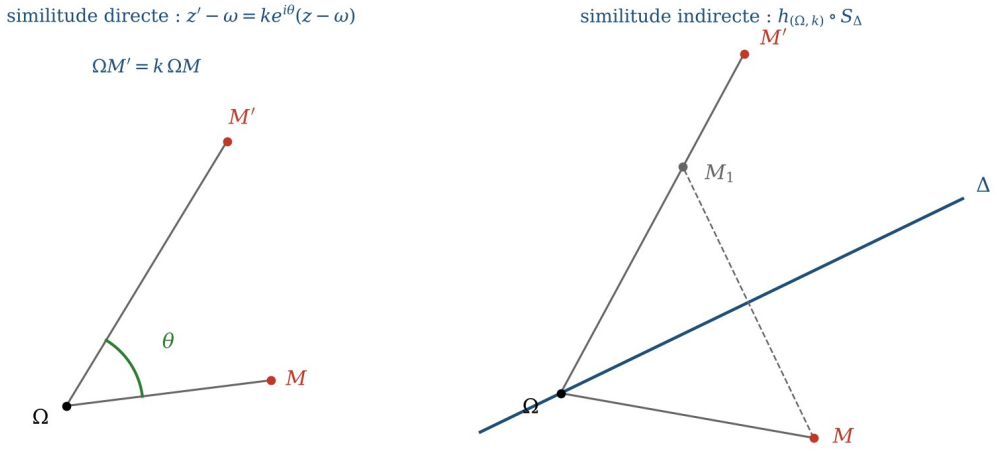
Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe I, appelé **centre**. Elle est entièrement déterminée par son centre I, son rapport k et son angle θ : pour tout point $M \neq I$ d'image M',

$$\mathrm{IM}' = k\,\mathrm{IM} \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{IM}}, \overrightarrow{\mathrm{IM}'}\right) \equiv \theta [2\pi].$$

◆ Forme réduite

$f = h \circ r = r \circ h$, où $h = h_{(I,k)}$ et $r = R_{(I,\theta)}$.

Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement (translation ou rotation).



À gauche : similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. À droite : similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ.

◆ Méthode

Méthode — déterminer le centre Ω d'une similitude directe f d'angle θ telle que $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$.

– *Angle droit.* Si $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}$, Ω voit $[AA']$ et $[BB']$ sous un angle droit : il appartient aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BB']$.

– *Arc capable.* En général, $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \theta$: Ω est sur un arc de cercle d'extrémités A et A'.

– *Droites images.* Si $f(D_1)=D_1'$ et $f(D_2)=D_2'$, et si $D_1 \cap D_2 = D_1' \cap D_2' = \{J\}$, alors $f(J)=J$, donc $J=\Omega$.

– *Calcul.* On résout $f(z)=z$.

◆ Théorème 4 (écriture complexe)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. f est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est

$$z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $|a|$ et son angle $arg(a)$. Si $a \neq 1$, son centre a pour affixe $\frac{b}{1-a}$ et $z' - z_I = a(z - z_I)$; si $a=1$, c'est la translation de vecteur d'affixe b.

5 Similitudes indirectes

◆ Théorème 5 (centre)

Toute similitude indirecte f de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe I, appelé **centre** de f ; c'est aussi le centre de la similitude directe $f \circ f$.

◆ Forme réduite

Il existe une unique droite Δ passant par I telle que

$$f = h_{(I,k)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(I,k)}.$$

Δ est l'**axe** de f ; c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

◆ Conséquences

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'axe Δ.

– f est déterminée par son centre, son rapport et son axe (ses **éléments caractéristiques**).

– Δ et la perpendiculaire à Δ en I sont globalement invariantes par f.

– $f \circ f = h_{(I,k^2)}$.

– Pour $M \neq I$ d'image M', l'axe Δ est la **bissectrice intérieure** de l'angle $\widehat{MIM'}$.

◆ Théorème 6 (écriture complexe)

f est une similitude indirecte si et seulement si son écriture complexe est

$$z' = a\bar{z} + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $k = |a|$. Si $|a| \neq 1$, son centre a pour affixe $z_I = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$. En écrivant $a = k e^{i\varphi}$, on a $z' - z_I = a\overline{(z - z_I)}$ et l'axe est la droite passant par I dirigée par $e^{i\varphi/2}$.

◆ Attention

Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe de rapport $|k| = -k$ et d'angle π. Dans l'écriture $z' = az + b$, le rapport est $|a|$, et non a.