EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 11 — Isométries du plan, déplacements et antidéplacements

Exercice 1

Soit ABC un triangle direct. On construit, extérieurement à ABC, les triangles équilatéraux $AB'C$, ABC' et $A'BC$.

1. Montrer que $AA'=BB'=CC'$.
2. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 2

$ABCD$ est un rectangle non carré de centre O. On note Δ_1 la médiatrice de $[AB]$, Δ_2 la médiatrice de $[AD]$, et S_1, S_2 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.

1. Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le rectangle $ABCD$. Montrer que $f(O)=O$.
2. Déterminer toutes les isométries du plan qui laissent globalement invariant le rectangle $ABCD$.

Exercice 3

On considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O.

1. Déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A,B,C\}$.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$; on pose $A'=r(A)$, $B'=r(B)$, $C'=r(C)$. Soit f une isométrie qui transforme $\{A,B,C\}$ en $\{A',B',C'\}$; on pose $g=r^{-1}\circ f$.
   a. Montrer que g est une isométrie qui laisse $\{A,B,C\}$ globalement invariant.
   b. Déterminer toutes les isométries qui transforment $\{A,B,C\}$ en $\{A',B',C'\}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité O, $D=S_{(BC)}(O)$ et $E=S_{(BA)}(O)$.

1. Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle.
2. Caractériser $S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$ et $S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$.
3. Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)}=S_{\Delta}\circ S_{(OA)}$ et $R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}=S_{(OA)}\circ S_{\Delta'}$.

Exercice 5

Soit IAB et JAC deux triangles rectangles isocèles respectivement en I et en J, tels que $\left(\vec{IB},\vec{IA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\vec{JA},\vec{JC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit K le milieu de $[BC]$.

1. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r' la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer $r' \circ r(B)$.
   b. Caractériser $r' \circ r$.
2. On appelle L l'image de I par r'. Que représente K pour le segment $[IL]$? En déduire la nature du triangle IJK.

Exercice 6

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARB, BPC et CQA, rectangles isocèles respectivement en R, P et Q. On note I, J, K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, et r_P, r_Q, r_R les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P, Q, R.

1.
   a. Montrer que $r_P \circ r_Q = S_I$.
   b. En déduire que IPQ est un triangle rectangle isocèle.
2.
   a. Démontrer que $r_Q \circ r_R = S_K$ et $r_R \circ r_P = S_J$.
   b. En déduire que KQR et JPR sont des triangles rectangles isocèles.
3. Démontrer que les droites (QB), (RC) et (AP) sont concourantes.

Exercice 7

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O son centre. Soit E le milieu de $[BC]$ et P le point de $[AC]$ tel que $CP = AB$. La droite (OE) coupe ζ en I et J, J et A étant sur le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les ensembles :
   a. $\gamma = \{ M \in P / (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \}$;
   b. $\nu = \{ M \in P / (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ et } MB < MC \}$.
3.
   a. Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.
   b. Démontrer que le centre de R est un point de ζ que l'on précisera.
   c. Quelle est la nature du triangle JAP ?
4. Soit $f = R \circ S_B$. Déterminer $f(B)$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 8

On considère un carré direct $ABCD$ de centre I. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, R_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose $f = t \circ R_D$, $g_1 = R_1 \circ f$ et $g_2 = R_2 \circ f$.

1.
   a. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.
   b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera le centre.
2.
   a. Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.
   b. Montrer que $g_2 \circ g_1^{-1} = R_2 \circ R_1^{-1}$.
   c. Soit $A_1 = g_1(A)$ et $A_2 = g_2(A)$. Montrer que A est le milieu de $[A_1 A_2]$.

Exercice 9

On considère un triangle équilatéral direct ABC. La médiatrice du segment $[AB]$ recoupe en D le cercle ζ circonscrit au triangle ABC. La droite (BD) coupe (AC) en A'.

1. Prouver que le triangle CBA' est rectangle en B et que la droite (AD) est la médiatrice du segment $[CA']$.
2. Soit $f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
   a. Déterminer l'image de A par f.
   b. Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que

$$x' = \frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5},\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}.$$

1.
   a. Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$ ou de $\bar{z}$.
   b. L'application f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Pourquoi ?
   c. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Conclure.
2.
   a. Démontrer que $f \circ f$ est une translation ; on note $2\vec{v}$ son vecteur.
   b. Déterminer la droite D telle que $f = s \circ t = t \circ s$, où t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie d'axe D.
   c. Vérifier que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D.

Exercice 11

Soit ABC un triangle direct, rectangle en A, et $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

1. Montrer que f est un antidéplacement.

2. Montrer que f est une symétrie glissante.
3. Donner la forme réduite de f.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Pour un paramètre complexe a, on considère l'application f_a qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -\bar{z} + 2a + 2i.$$

1. Montrer que f_a est une isométrie.
2. Montrer que f_a est un antidéplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f_a.
4. Identifier alors f_a.

Exercice 13

Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, ainsi que le parallélogramme $AGKE$. On note M le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1.
   a. Montrer qu'il existe un déplacement f, dont on déterminera les éléments caractéristiques, transformant le triangle ABC en le triangle GKA (c'est-à-dire $f(A)=G$, $f(B)=K$, $f(C)=A$).
   b. Montrer que les points H, A, K sont alignés.
   c. Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendiculaires.
2.
   a. Montrer que $FB=CK$.
   b. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CK})$.
3.
   a. Montrer qu'il existe un déplacement g transformant le triangle ABC en le triangle EAK, et en déterminer les éléments caractéristiques.
   b. Prouver que $DC=BK$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BK})$.
4. Montrer que les droites (AK), (BF) et (CD) sont concourantes.

Exercice 14

Soit ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, O le centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC et I le point d'intersection de ses bissectrices intérieures. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient $CP=BQ=BC$.

1.
   a. Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.
   b. Montrer que $(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
2. Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.

a. Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. Montrer que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

c. Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

3. On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$.

a. Montrer que $O = f(O_2)$.

b. En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et $g = f \circ r \circ f$.

a. Montrer que g est une translation. Vérifier que $g(O_2) = O_1$ et en déduire le vecteur de g.

b. Montrer que $r(B) = C$. En déduire que $g(P) = Q$.

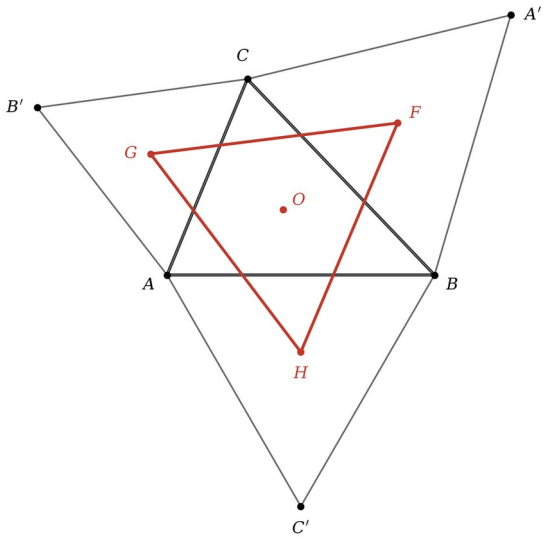
c. Montrer que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 15

On considère un triangle direct ABC de centre de gravité O. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC', de sorte que

$$(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}) \equiv (\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C}) \equiv (\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'A}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

On désigne par F, G et H les centres respectifs des triangles CBA', ACB' et BAC'. Le but de l'exercice est de montrer, de deux façons différentes, que le triangle FGH est équilatéral direct.



Configuration du théorème de Napoléon.

1.

a. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $R(C')$ et $R(C)$. En déduire que $CC' = BB'$ et que $(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b. Montrer que $\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.

c. Montrer que $OH=OG$ et $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OG}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

d. En déduire que FGH est équilatéral direct de centre O.

2. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centres respectifs F, G et H.

a. Quelle est l'image de B par $f=R_1\circ R_2\circ R_3$? Déterminer la nature de f.

b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $R_2\circ R_3$.

c. On note S la symétrie orthogonale d'axe (GH). Déterminer les axes des symétries S_2 et S_3 telles que $R_2=S_2\circ S$ et $R_3=S\circ S_3$. Montrer que ces axes se coupent en un point F' tel que $F'GH$ soit équilatéral direct.

d. Montrer que F' et F sont confondus et en déduire que FGH est équilatéral direct.