COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 11 — Isométries du plan, déplacements et antidéplacements

### ◆ Sommaire

1. Isométries : définition et premières propriétés
2. Isométries et points fixes
3. Composée de deux symétries orthogonales
4. Déplacements et antidéplacements
5. Symétries glissantes
6. Écritures complexes

### ◆ Objectifs du chapitre

– Reconnaître une translation, une rotation, une symétrie orthogonale, une symétrie glissante et en donner les éléments caractéristiques.

– Décomposer une translation ou une rotation en produit de deux symétries orthogonales, et réduire une composée de symétries.

– Utiliser l'unicité du déplacement (ou de l'antidéplacement) qui envoie deux points distincts sur deux points donnés.

– Traduire une isométrie par son écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.

– Exploiter les isométries pour démontrer des égalités de distances, des orthogonalités, des alignements et des concours de droites.

Le plan $P$ est orienté. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitres 2 et 3 : *Isométries du plan* ; *Déplacements – Antidéplacements*). Pour deux points $M$, $N$, on note $(\vec{u}, \vec{v})$ une mesure de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls.

## 1 Isométries : définition et premières propriétés

### ◆ Définition

On appelle **isométrie** du plan toute application $f$ de $P$ dans $P$ qui conserve les distances : pour tous points $M$ et $N$ d'images $M'$ et $N'$, on a $M'N' = MN$.

### ◆ Propriétés

Soit $f$ une isométrie.

– $f$ est une bijection de $P$ sur $P$ et $f^{-1}$ est une isométrie ; la composée de deux isométries est une isométrie.

– $f$ conserve le barycentre (en particulier le milieu), l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les aires et les mesures des angles géométriques.

– L'image d'une droite est une droite, celle d'un segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$, celle d'un cercle de centre $I$ et de rayon $R$ est le cercle de centre $f(I)$ et de rayon $R$.

Les isométries de référence (rappels) :

| Isométrie | Notation | Définition de $M'=f(M)$ | Points fixes |
|---|---|---|---|
| **Translation de vecteur $\vec{u}$** | $t_{\vec{u}}$ | $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ | aucun si $\vec{u}\neq\vec{0}$ |
| **Rotation de centre $I$, d'angle $\theta$** | $R_{(I,\theta)}$ | $IM'=IM$ et $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})\equiv\theta\,[2\pi]$ si $M\neq I$ | $\{I\}$ si $\theta\not\equiv 0$ |
| **Symétrie centrale de centre $I$** | $S_I$ | $I$ milieu de $[MM']$ ; c'est $R_{(I,\pi)}$ | $\{I\}$ |
| **Symétrie orthogonale d'axe $\Delta$** | $S_\Delta$ | $\Delta$ médiatrice de $[MM']$ si $M\notin\Delta$ | la droite $\Delta$ |

## 2 Isométries et points fixes

### ◆ Théorème 1 (points fixes)

Soit $f$ une isométrie.

– Si $f$ fixe deux points distincts $A$ et $B$, alors $f$ fixe tout point de la droite $(AB)$ : $f$ est l'identité ou la symétrie $S_{(AB)}$.

– Si $f$ fixe trois points non alignés, alors $f=id_P$.

### ◆ Théorème 2

Une isométrie est entièrement déterminée par les images de trois points non alignés : si deux isométries $f$ et $g$ coïncident en trois points non alignés, alors $f=g$.

### ◆ Conséquence

Une isométrie qui fixe un point $O$ est soit l'identité, soit une rotation de centre $O$, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par $O$.

## 3 Composée de deux symétries orthogonales

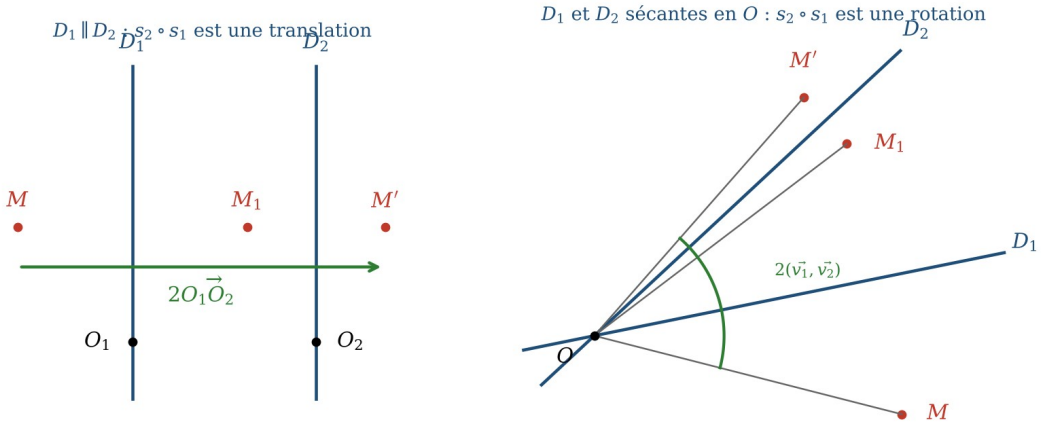
### ◆ Théorème 3

Soit $D_1$ et $D_2$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

– Si $D_1 \parallel D_2$ : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, où $O_1 \in D_1$, $O_2 \in D_2$ et $(O_1O_2) \perp D_1$.

– Si $D_1$ et $D_2$ sont sécantes en $O$ : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R_{(O, 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2))}$.

– En particulier, si $D_1 \perp D_2$ en $O$ : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_O$.




*Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles (à gauche) ou sécants (à droite).*

### ◆ Méthode — décomposer

Réciproquement :

– toute translation $t_{\vec{u}}$ s'écrit $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ où $D_1$ est n'importe quelle droite orthogonale à $\vec{u}$ et $D_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D_1)$ ;

– toute rotation $R_{(O,\theta)}$ s'écrit $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ où $D_1$ est n'importe quelle droite passant par $O$ et $D_2$ la droite passant par $O$ telle que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv \frac{\theta}{2} [\pi]$.

On choisit $D_1$ (ou $D_2$) de façon à **simplifier** une composée : deux symétries identiques consécutives s'annulent, car $S_\Delta \circ S_\Delta = id_P$.

### ◆ Théorème 4

Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

## 4 Déplacements et antidéplacements

### ◆ Définitions

Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les mesures des angles orientés ; c'est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales. Un **antidéplacement** est une isométrie qui change toute mesure

d'angle orienté en son opposée ; c'est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.

**◆ Théorème 5 (classification)**

– Les déplacements sont les translations et les rotations (l'identité étant la translation de vecteur nul).

– Les antidéplacements sont les symétries orthogonales et les symétries glissantes.

– La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement ; la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

**◆ Angle d'un déplacement**

Soit $f$ un déplacement. Il existe un réel $\theta$ tel que, pour tous points $M \neq N$ d'images $M'$, $N'$ : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$. On l'appelle **angle** de $f$.

– Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, $f$ est une translation ; sinon, $f$ est une rotation d'angle $\theta$.

– Si $f$ et $g$ sont des déplacements d'angles $\theta$ et $\theta'$, alors $g \circ f$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.

**◆ Théorème 6 (unicité)**

Soit $A, B, C, D$ quatre points tels que $AB = CD \neq 0$.

– Il existe un **unique déplacement** $f$ tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$ ; son angle est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

– Il existe un **unique antidéplacement** $g$ tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$.

**◆ Méthode — trouver le centre d'une rotation**

Si la rotation $f$, d'angle $\theta \not\equiv 0$, envoie $A$ sur $C$ et $B$ sur $D$, son centre $\Omega$ vérifie $\Omega A = \Omega C$ et $\Omega B = \Omega D$ : il appartient aux médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$. Il vérifie aussi $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$ : un arc capable permet souvent de l'identifier sur un cercle.

## 5 Symétries glissantes

**◆ Théorème et définition**

On appelle **symétrie glissante** la composée $t_{\vec{u}} \circ S_D$ d'une symétrie orthogonale et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul **directeur de** $D$. On a alors

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}.$$

Le couple $(D, \vec{u})$ est unique : c'est la **forme réduite** de $f$ ; $D$ est l'**axe** et $\vec{u}$ le **vecteur** de $f$.

◆ **Propriétés**

Soit $f$ une symétrie glissante d'axe $D$ et de vecteur $\vec{u}$, et $M'=f(M)$.

– $f$ n'a aucun point fixe ; $f\circ f=t_{2\vec{u}}$.

– Le milieu de $[MM']$ appartient à $D$ ; si $M\in D$, alors $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

– Un antidéplacement qui possède un point fixe est une symétrie orthogonale ; un antidéplacement sans point fixe est une symétrie glissante.

◆ **Méthode**

**Méthode — réduire $t_{\vec{w}}\circ S_{\Delta}$ ($\vec{w}$ quelconque).** On écrit $\vec{w}=\vec{w_1}+\vec{w_2}$ avec $\vec{w_1}$ orthogonal à $\Delta$ et $\vec{w_2}$ directeur de $\Delta$. Alors $t_{\vec{w_1}}\circ S_{\Delta}=S_D$ où $D=t_{\frac{1}{2}\vec{w_1}}(\Delta)$, et $t_{\vec{w}}\circ S_{\Delta}=t_{\vec{w_2}}\circ S_D$ : c'est $S_D$ si $\vec{w_2}=\vec{0}$, sinon la symétrie glissante d'axe $D$ et de vecteur $\vec{w_2}$.

## 6 Écritures complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ ; $M(z)$ a pour image $M'(z')$.

◆ **Théorème 7**

– $f$ est un **déplacement** si et seulement si son écriture complexe est $z'=az+b$ avec $|a|=1$. Si $a=1$, c'est la translation de vecteur d'affixe $b$ ; si $a=e^{i\theta}\neq 1$, c'est la rotation d'angle $\theta$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.

– $f$ est un **antidéplacement** si et seulement si son écriture complexe est $z'=a\bar{z}+b$ avec $|a|=1$.

◆ **Attention**

$R_{(I,\theta)}\circ R_{(J,\theta')}$ est une rotation d'angle $\theta+\theta'$ si $\theta+\theta'\not\equiv 0\,[2\pi]$, mais une **translation** si $\theta+\theta'\equiv 0\,[2\pi]$. Pour en trouver le centre (ou le vecteur), on cherche l'image d'un point bien choisi, ou on décompose chaque rotation à l'aide de la droite $(IJ)$.