EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 10 — Nombres complexes

Exercices 1 à 12 : calculs, formes trigonométrique et exponentielle, ensembles de points. Exercices 13 à 18 : équations. Exercices 19 à 25 : nombres complexes et géométrie. Exercices 26 à 28 : approfondissement.

Exercice 1

Soit a et b deux réels non nuls. On pose $z_1=\dfrac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2=\dfrac{a-ib}{a+ib}$. Montrer que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.

Exercice 2

Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$. Calculer $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Exercice 3

Soit A et B les points d'affixes -1 et i. Pour $z\neq i$, on pose $Z=\dfrac{z+1}{z-i}$, avec $z=x+iy$, x et y réels ; M désigne l'image de z.

1. Interpréter géométriquement $|z+1|$ et $|z-i|$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $|Z|=1$.
3. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit un réel.
5. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur.
6. Déterminer l'ensemble des points M tels que $arg(Z)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3=1$. (On note j la racine de partie imaginaire positive.)
2. Écrire les racines de (E) sous forme trigonométrique.
3. Calculer j^2 et $1+j+j^2$.
4. Montrer que, pour tous nombres complexes a, b, c : $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2)=a^3+b^3+c^3-3abc$.
5. On considère trois points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c. Montrer que les relations

$$a+bj+cj^2=0\,,\ b+cj+aj^2=0\,,\ c+aj+bj^2=0$$

sont équivalentes et qu'elles constituent une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral direct.

Exercice 5

Dans le plan complexe, on considère les points $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$ tels que $(*)$: $\dfrac{MB}{MA}=2$.

1. Montrer que $(*) \Leftrightarrow (z-5)(\bar{z}-5)=16$.
2. En déduire l'ensemble des points M.

Exercice 6

Soit $P(z)=z^3+az^2+bz+c$, où a, b et c sont des nombres complexes ; on note z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation $P(z)=0$, de sorte que $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$.

1. Montrer que $a=-(z_1+z_2+z_3)$, $b=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ et $c=-z_1z_2z_3$.
2. Application 1. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système : $xyz=1$, $xy+yz+zx=1$, $x+y+z=1$.
3. Application 2. Déterminer les nombres complexes x, y, z de modules inférieurs ou égaux à 1 et vérifiant les égalités $xyz=x+y+z=1$.

Exercice 7

Soit $z=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$.

1. Soit $z'=(1+i)z$. Écrire z' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire la forme trigonométrique de z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 8

Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$. On considère les nombres complexes $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$, $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_3=\dfrac{\sin\theta+i\cos\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ lorsque θ décrit $[0,\pi[$.

Exercice 9

On donne dans le plan complexe trois points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels MNP est un triangle rectangle en M.

Exercice 10

On donne le nombre complexe $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Exprimer z^2 sous forme algébrique.
2. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
3. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 11

Soit α et β deux réels. Montrer que

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \text{ et } e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Exercice 12

Soit a et b deux nombres réels ; on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b.

1. Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z', que $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.
2. En déduire que, si $z+z'\neq 0$: $2\,arg(z+z')\equiv arg(z)+arg(z')\,[2\pi]$.
3. On appelle M et M' les images de z et z' et N le point tel que $OMNM'$ soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2-2z\cos\varphi+1=0$, où $\varphi\in\mathbb{R}$.
2. $(z-1)^6=(z-1)^3+1$.
3. $(1+i)z^2-(5+i)z+6+4i=0$.
4. $z^5=\frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$.
5. $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$, où $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère l'équation (E) : $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$.

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
2. Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+(2-3i)z^2-(7+i)z+14i-2=0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

Exercice 16

On considère l'équation (E) : $z^4-2z^3-z^2-2z+1=0$.

1. Vérifier que (E) est équivalente au système : $Z=z+\frac{1}{z}$ et $Z^2-2Z-3=0$.
2. En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère la suite de points M_n d'affixes respectives z_n définies par $z_0=8$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$.

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$.
2. Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
3. Montrer que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et comparer les longueurs OM_{n+1} et M_nM_{n+1}.

Exercice 18

Soit $\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ et (E_φ) l'équation : $z^2-(3\cos\varphi+1+i\cos\varphi)z+2\cos\varphi(\cos\varphi+1+i\cos\varphi)=0$.

1. Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2.
2. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
   a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.
   b) Montrer que $2M_1M_2^2=1+(2\cos\varphi-1)^2$.
   c) Pour quelles valeurs de φ la distance entre M_1 et M_2 est-elle maximale ?
   d) Déterminer $\cos\varphi$ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle en M_1.

Exercice 19

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère un quadrilatère $ABCD$. On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que

$$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP})\equiv(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DQ})\equiv(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\equiv(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Soit a, b, c, d les affixes respectives de A, B, C, D et m, n, p, q celles de M, N, P, Q.

1. Démontrer les relations : $m=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$, $n=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)+b$, $p=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-d)+d$, $q=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-d)+d$.
2. En utilisant les relations précédentes :
   a) démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme ;
   b) démontrer que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{QP})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, $AC=QP$, $(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{BD})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $NP=BD$.
3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient $AC=BD$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})\equiv\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, où k est un entier relatif.

Exercice 20

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z+z'|=|z|+|z'|$ si, et seulement si, $arg\, z \equiv arg\, z' [2\pi]$.

Exercice 21

Soit un triangle ABC ; on note O le centre de son cercle circonscrit. Dans un repère orthonormé de centre O, on note a, b et c les affixes des points A, B et C. Soit H le point d'affixe $h=a+b+c$.

1. Démontrer que $|a|=|b|=|c|$.
2.
   a) Soit $w=\overline{b}\,c-b\,\overline{c}$. Calculer $w+\overline{w}$. En déduire que w est imaginaire pur.
   b) Démontrer, à l'aide du a), que les nombres $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})$ et $\dfrac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.
3.
   a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
   b) En utilisant les résultats précédents, démontrer que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
   c) Expliquer, sans calculs supplémentaires, pourquoi H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 22

Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de i, associe $z'=f(z)=i+\dfrac{2}{\overline{z}+i}$. On note A le point d'affixe i et T l'application du plan privé de A dans le plan qui, au point M d'affixe z, associe le point $M'=T(M)$ d'affixe z'.

1.
   a) Calculer $f(1)$ et $f(2+i)$. b) Résoudre l'équation $f(z)=0$.
2.
   a) Calculer $arg[(z'-i)(\overline{z}+i)]$. b) Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
3.
   a) Exprimer l'affixe z'' de $M''=(T\circ T)(M)$ en fonction de l'affixe z de M. b) Que peut-on dire de $T\circ T$?
4. On appelle (J) l'ensemble des points du plan invariants par T.
   a) Démontrer que M appartient à (J) si, et seulement si, $AM=\sqrt{2}$. b) Caractériser géométriquement (J).
5. Dans cette question, on suppose que $z=1+i+e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel ; on note B le point d'affixe $1+i$.
   a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$?
   b) Montrer que $z'-i=1+i\tan\dfrac{\theta}{2}$, avec $z'=f(z)$.
   c) À quelle courbe (L) appartient le point M' d'affixe z' ?

d) En déduire $T(\Gamma)$, image de (Γ) par T. Construire (Γ) et $T(\Gamma)$.

Exercice 23

On considère l'application $f : \mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $z \mapsto f(z) = \dfrac{z-1}{i(z+i)}$, et l'application F du plan privé de B dans lui-même qui, au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ avec $z' = f(z)$, où B est le point d'affixe $-i$.

1. Montrer que f est involutive (c'est-à-dire $f \circ f$ est l'identité de $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$) et en déduire que f est bijective.
2.
   a) Vérifier que, pour tout $z \neq -i$: $z' + i = \dfrac{-1+i}{z+i}$.
   b) En déduire que, pour tout point M distinct de B : $BM \times BM' = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \dfrac{3\pi}{4} [2\pi]$.
3. Déterminer les images par F de la droite $(D) : y = x - 1$ privée de B et du cercle (C) de centre B et de rayon 1.

Exercice 24

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2. Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, avec $\mathrm{Im}(z_1) < 0$.
3. On pose $\omega = \dfrac{z_1}{z_0}$. Donner la forme trigonométrique de ω.
4. À tout nombre complexe z non nul, on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, ωz et $\omega^2 z$. Montrer que $OM M_1 M_2$ est un losange.

Exercice 25

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application s qui, au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (2+i)\bar{z} + 1 - 3i$.

1. Vérifier que $A(0, -1)$ est l'unique point invariant par s.
2. Montrer que s est bijective et expliciter son application réciproque s^{-1}.
3. Prouver que, pour tout point M distinct de A, d'image M' par s : $AM' = \sqrt{5}\, AM$.
4. Montrer que, pour tous points deux à deux distincts M_1, M_2, M_3, d'images respectives M_1', M_2', M_3' : $(\overrightarrow{M_1'M_2'}, \overrightarrow{M_1'M_3'}) \equiv -(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) [2\pi]$.
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $arg(z') \equiv 0 [2\pi]$.
6. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $(z')^3 = 1$. (On pourra utiliser la question 2.)

Exercice 26

Soit β un nombre complexe tel que $\beta^7=1$ et $\beta\neq 1$. Montrer que $\dfrac{\beta}{1+\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{1+\beta^4}+\dfrac{\beta^3}{1+\beta^6}=-2$.

Exercice 27

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit U, V, W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 28

1.

a) Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$.

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation $z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1=0$, où n est un entier naturel non nul.

2. Soit $P_\alpha(z)=z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1$.

a) Justifier la factorisation : $P_\alpha(z)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z^2-2\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)z+1\right)$.

b) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}}$.

3. Pour tout $\alpha\in]0,\pi[$ et tout entier $n\geq 2$, on pose $H_n(\alpha)=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$.

a) Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha)=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}$.

b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

c) En déduire que, pour tout entier $n\geq 2$: $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.