COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 10 — Nombres complexes

◆ **Sommaire**

1. Forme algébrique, conjugué, module
2. Interprétation géométrique
3. Forme trigonométrique, forme exponentielle
4. Racines n-ièmes
5. Équations du second degré

◆ **Objectifs du chapitre**

– Calculer avec les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle ; passer de l'une à l'autre.

– Traduire en termes de nombres complexes une distance, un angle, un alignement, une orthogonalité.

– Déterminer et représenter un ensemble de points défini par une condition sur son affixe.

– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré, les équations $z^n = a$, et des équations de degré supérieur s'y ramenant.

– Utiliser les formules de Moivre et d'Euler.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 2, chapitre 1).

1 Forme algébrique, conjugué, module

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ réels. Le **conjugué** de z est $\overline{z} = a - ib$; le **module** de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

◆ **Propriétés**

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier relatif n (avec $z \neq 0$ ou $z' \neq 0$ lorsque c'est nécessaire) :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, z\overline{z} = |z|^2, \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

$$|zz'| = |z||z'|, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, |z^n| = |z|^n, |\overline{z}| = |z|, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

z est réel $\Leftrightarrow \overline{z}=z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z}=-z$; $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

2 Interprétation géométrique

◆ Affixes

Soit A, B, C, D des points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D.

– Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB=|z_B - z_A|$.

– Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

– Si $A\neq B$ et $C\neq D$: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\equiv arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

◆ Méthode — traduire une configuration

Soit A, B, C trois points distincts et $Z=\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

– A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ Z est réel.

– $(AB)\perp(AC) \Leftrightarrow$ Z est imaginaire pur.

– ABC est isocèle rectangle en $A \Leftrightarrow Z=i$ ou $Z=-i$.

– ABC est équilatéral $\Leftrightarrow Z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

– $|z - z_A|=r$: cercle de centre A et de rayon r ; $|z - z_A|=|z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.

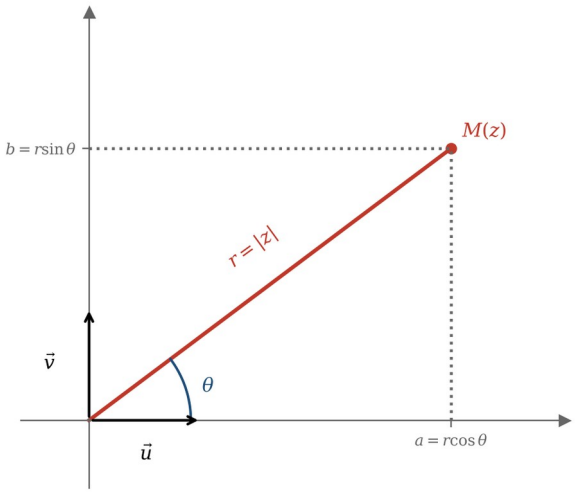
3 Forme trigonométrique, forme exponentielle

◆ Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image. Un **argument** de z est une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$; on note $arg\, z\equiv\theta[2\pi]$. En posant $r=|z|$:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta],\text{ avec }\cos\theta=\frac{a}{r},\sin\theta=\frac{b}{r}.$$

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$; la **forme exponentielle** de z est $z=re^{i\theta}$.



Module et argument d'un nombre complexe.

◆ Propriétés

Pour tous réels θ, θ' et tout entier relatif n :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')},\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')},\ \frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}},\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta},\ -e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}.$$

Autrement dit : $arg(zz')\equiv arg\,z+arg\,z'$, $arg\frac{z}{z'}\equiv arg\,z-arg\,z'$, $arg(z^n)\equiv n\,arg\,z$, $arg\,\overline{z}\equiv -arg\,z$, $arg(-z)\equiv arg\,z+\pi\,[2\pi]$.

Valeurs particulières : $e^{i0}=1$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$.

◆ Formule de Moivre

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

◆ Formules d'Euler

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\text{ et }\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

◆ Attention

Dans $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, on doit avoir $r>0$. Par exemple $-2e^{i\theta}$ n'est pas une forme exponentielle : $-2e^{i\theta}=2e^{i(\theta+\pi)}$.

4 Racines n-ièmes

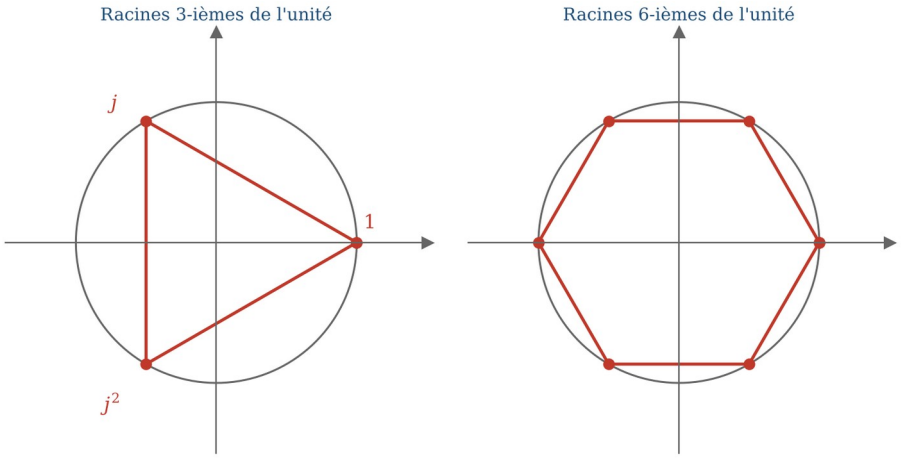
◆ Théorème

Soit $n \geq 2$ un entier et $a = r e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($r > 0$). L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$ exactement n solutions :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

◆ Conséquence

Les images des racines n-ièmes de l'unité, $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique ; leur somme est nulle.



Racines cubiques et racines sixièmes de l'unité. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$: $j^3 = 1$, $\bar{j} = j^2$ *et* $1 + j + j^2 = 0$.

5 Équations du second degré

◆ Racines carrées

Tout nombre complexe non nul $a = r e^{i\varphi}$ admet deux racines carrées opposées : $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $-\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

◆ Théorème

Soit a, b, c des nombres complexes, $a \neq 0$. L'équation $a z^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues)

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. De plus $a z^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$,

$z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2=\dfrac{c}{a}$.

◆ Méthode — racines carrées sous forme algébrique

Pour résoudre $(x+iy)^2=a+ib$ (x, y réels), on utilise le système

$$x^2-y^2=a,\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},\ 2xy=b.$$

Les deux premières équations donnent x^2 et y^2 ; la troisième donne le signe du produit xy.

◆ Méthode — équation de degré 3

Si l'on connaît (ou si l'on cherche sous une forme imposée : réelle, imaginaire pure) une solution z_0, on factorise par $(z-z_0)$ et l'on se ramène au second degré.

Exemple. Racines carrées de $3+4i$: $x^2-y^2=3$, $x^2+y^2=5$, $xy>0$, d'où $x^2=4$, $y^2=1$: les racines carrées sont $2+i$ et $-2-i$.