EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Équations différentielles

Exercices 1 à 6 : équations du premier ordre avec second membre. Exercices 7 à 9 : changements de fonction inconnue. Exercices 10 et 11 : modélisation, équation $y''+\omega^2 y=0$. Exercices 12 à 15 : problèmes de synthèse.

Exercice 1

Soit (E$_1$) l'équation différentielle : $y'=2y+4x$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2x-1$.
   a) Vérifier que h est une solution particulière de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer qu'une fonction $f=g+h$ est solution de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E$_2$) : $y'=2y$.
2.
   a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E$_2$) sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire les solutions f de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer la solution de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+2y=4e^{1-2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E$_0$) : $y'+2y=0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E$_0$).
4. En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y=\dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^{x})$ est une solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi-f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'+2y=0$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (1) : $y'-2y=xe^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y=0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a et b deux réels et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(ax+b)e^x$.
   a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle : $y'+y=e^{-x}$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E$_0$) : $y'-2y=0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E$_0$).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 7

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété (E) : pour tout $x>0$, $xf'(x)-3f(x)=3\ln x$.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout réel x : $xP'(x)-3P(x)=0$.
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $f(1)=0$; soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation $f(x)=x^3h(x)$.
   a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
   b) Montrer que f vérifie la propriété (E) si, et seulement si, pour tout $x>0$: $h'(x)=\dfrac{3}{x^4}\ln x$.
   c) On suppose que f vérifie la propriété (E). Montrer que h est définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{3}{t^4}\ln t\,dt$. Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+y=2e^{-x}$.

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x)=\lambda x^2 e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).
2. Démontrer qu'une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $z=y-y_0$ est solution de l'équation différentielle (E$_1$) : $z''+2z'+z=0$.
3. Soit z une solution de (E$_1$) et $t=z'+z$. Montrer que $t'+t=0$.
4. Résoudre alors l'équation différentielle (E$_1$).
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
6. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par le point de coordonnées $(-1,0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-5y'+4y=0$.

1. Soit y une solution de (E) et $r=y'-4y$. Montrer que $r'-r=0$.
2. Résoudre alors l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y=-2x+1$.
4. On pose $u(x)=2e^x-e^{4x}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $u(x)>0$.
5. On considère la partie de la courbe d'équation $y=u(x)$ pour $-1\leq x\leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide de volume V (en unités de volume). Calculer la valeur exacte de V.

Exercice 10

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $f(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle $f'=a-bf$, avec $a=2,088\times10^{-2}$ et $b=2,32\times10^{-4}$, lorsque t est exprimé en secondes et $f(t)$ en °C.

1.
   a) Montrer que $y=f-90$ est solution de l'équation différentielle (1) : $y'=-by$.
   b) Donner la solution générale de (1).
   c) En déduire l'expression de $f(t)$ sachant que $f(0)=20$.
2. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80 °C ?

Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle $4y''+49y=0$.
2.
   a) Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ et $f(\pi)=1$.
   b) Déterminer deux réels r et θ strictement positifs et $\varphi\in\,]-\pi,\pi[$ tels que $f(x)=r\cos(\theta x+\varphi)$.

Exercice 12

Partie A. Soit (E$_1$) l'équation différentielle : $y'=2y+4x$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2x-1$.
   a) Vérifier que h est une solution particulière de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer qu'une fonction $f=g+h$ est solution de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E$_2$) : $y'=2y$.
2. a) Déterminer les solutions g de (E$_2$) sur $\mathbb{R}$. b) En déduire les solutions f de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution de (E$_1$) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2x-1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite d'équation $y=-2x-1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation complet.

Exercice 13

Partie A. Soit l'équation différentielle (E) : $y'+2y=4e^{1-2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E$_0$) : $y'+2y=0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E$_0$).
4. En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(2x-1)e^{1-2x}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire que la courbe C_f admet une asymptote horizontale.
2. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.
3. Justifier que l'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.
5. Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
6. Tracer la courbe C_f et les tangentes déterminées précédemment.

Partie C. Soit $y=g(x)$ l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse a. On note $\varphi(x)=f(x)-g(x)$.

1.

a) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f'(a)$. b) Montrer que $\varphi''(x)=f''(x)$.

2. Résoudre $f''(x)=0$.

3. Dans cette question, on pose $a=\dfrac{3}{2}$.

a) Déterminer les variations de φ' et en déduire le signe de $\varphi'(x)$.

b) Déterminer les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$.

c) Déterminer la position de C_f par rapport à sa tangente T.

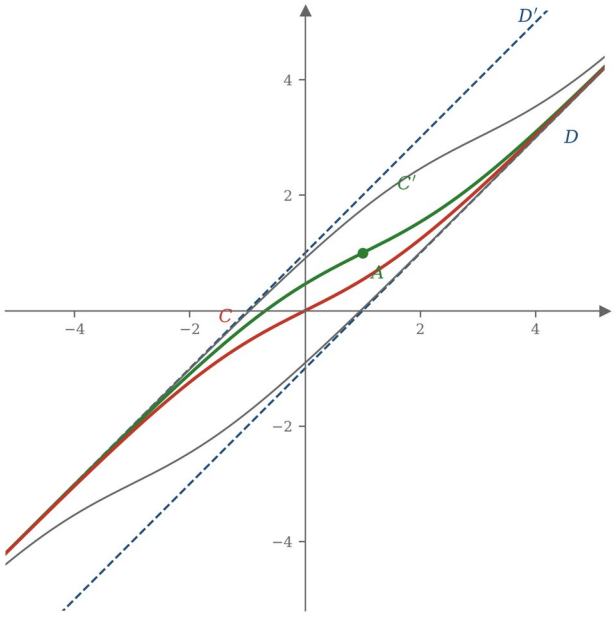
Exercice 14

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=x+\dfrac{1-k\,e^x}{1+k\,e^x}$.

a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle (E) : $2\,y'=(y-x)^2+1$.

b) En déduire le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la droite D d'équation $y=x-1$, la droite D' d'équation $y=x+1$ et plusieurs courbes C_k. Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O, puis celui associé à la courbe C' passant par le point $A(1,1)$.



3. On remarque que, pour tout réel x : $f_k(x)=x-1+\dfrac{2}{1+k\,e^x}$ (1) et $f_k(x)=x+1-\dfrac{2k\,e^x}{1+k\,e^x}$ (2). En déduire, pour tout k strictement positif :

– la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;

– les asymptotes de la courbe C_k.

Exercice 15

Partie I. On donne un entier naturel n strictement positif et l'on considère l'équation différentielle (E$_n$) : $y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. On suppose que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout réel x : $g(x)=h(x)e^{-x}$.

   a) Montrer que g est solution de (E$_n$) si, et seulement si, pour tout réel x : $h'(x)=\frac{x^n}{n!}$.

   b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E$_n$), sachant que $h(0)=0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que φ est solution de (E$_n$) si, et seulement si, $\varphi-g$ est solution de l'équation (F) : $y'+y=0$.

   b) Résoudre (F).

   c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E$_n$).

   d) Déterminer la solution f de l'équation (E$_n$) vérifiant $f(0)=0$.

Partie II

1. On pose, pour tout réel x : $f_0(x)=e^{-x}$ et $f_1(x)=xe^{-x}$.

   a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'+y=f_0$.

   b) Pour tout entier $n\geq 1$, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y'+y=f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0)=0$. En utilisant la partie I, montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier $n\geq 1$: $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout x de $[0,1]$: $0\leq f_n(x)\leq\frac{x^n}{n!}$.

   b) En déduire que $0\leq I_n\leq\frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

   c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $I_k-I_{k-1}=-\frac{1}{k!}e^{-1}$.

   d) Calculer I_0 et en déduire que $I_n=1-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

   e) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.