COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 9 — Équations différentielles

◆ **Sommaire**

1. Équation y'=ay
2. Équation y'=ay+b
3. Équation y″+ω2y=0

◆ **Objectifs du chapitre**

– Résoudre les équations $y'=ay$, $y'=ay+b$ et $y''+\omega^2 y=0$, et déterminer la solution vérifiant des conditions initiales données.

– Résoudre une équation $y'=ay+\varphi(x)$ lorsqu'on en connaît (ou qu'on est guidé pour en trouver) une solution particulière.

– Exploiter un changement de fonction inconnue.

– Modéliser une situation simple par une équation différentielle.

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction (notée en général y) et dans laquelle figurent certaines des dérivées de y. **Résoudre** l'équation sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient sur I.

1 Équation y'=ay

◆ **Théorème**

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions

$$x\mapsto k\,e^{ax}, k\in\mathbb{R}\ .$$

Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique** solution telle que $y(x_0)=y_0$: c'est $x\mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Démonstration. Les fonctions $x\mapsto k\,e^{ax}$ sont solutions. Réciproquement, si y est solution, la fonction $z:x\mapsto y(x)e^{-ax}$ a pour dérivée $(y'(x)-ay(x))e^{-ax}=0$: elle est constante sur $\mathbb{R}$, d'où $y(x)=k\,e^{ax}$.

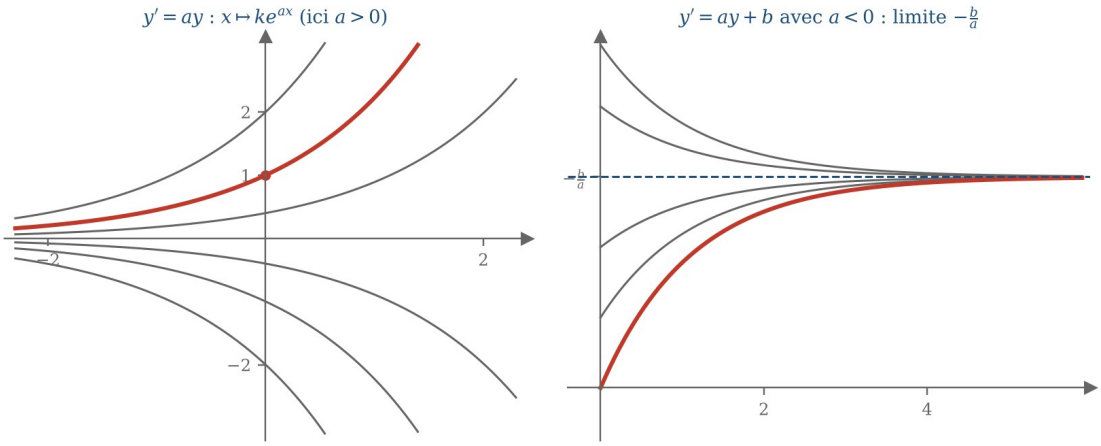
2 Équation y'=ay+b

◆ **Théorème**

Soit a et b deux réels, $a\neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions

$$x \mapsto k\,e^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}\ .$$

L'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est $x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.



Courbes de quelques solutions ; une seule passe par un point donné.

◆ Méthode

Méthode — équation $y' = ay + \varphi(x)$ avec second membre. C'est la démarche de la plupart des exercices :

1. on dispose d'une **solution particulière** u de l'équation (E) (donnée, ou cherchée sous une forme indiquée) ;
2. on montre qu'une fonction v est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de l'équation « sans second membre » (E_0) : $y' = ay$;
3. on en déduit les solutions de (E) : $x \mapsto u(x) + k\,e^{ax}, k \in \mathbb{R}$;
4. on détermine k à l'aide de la condition initiale.

3 Équation y″+ω2y=0

◆ Théorème

Soit ω un réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$$x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), A, B \in \mathbb{R}\ .$$

Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique** solution f telle que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$: c'est $x \mapsto x_0 \cos(\omega x) + \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)$.

◆ **Méthode**

Transformation de $A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$**.** Si $(A,B)\neq(0,0)$, on pose $r=\sqrt{A^2+B^2}$ et l'on choisit φ tel que $\cos\varphi=\dfrac{A}{r}$ et $\sin\varphi=-\dfrac{B}{r}$; alors

$$A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)=r\cos(\omega x+\varphi).$$