EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Fonction exponentielle

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t>0$ et $g(0)=1$.

1.
   a) Établir que g est continue en 0.
   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2.
   a) Pour tout $t>0$, calculer $g'(t)$.
   b) Prouver que, pour tout $t\geq 0$: $1+t\leq e^{t}$.
   c) En déduire le signe de g' et le sens de variation de g.
3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(t)=1-t+\dfrac{t^2}{2}-e^{-t}$.
   a) Calculer h' et h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
   b) Prouver que, pour tout $t\geq 0$: $0\leq h(t)\leq \dfrac{t^3}{6}$ (I). Pour cela, on établira d'abord que $0\leq h''(t)\leq t$ et l'on en déduira un encadrement de h' puis de h.
   c) Déduire de la relation (I) un encadrement de $\dfrac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner $g'(0)$.
4. Construire la courbe représentative de g, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 2

Partie A. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ et l'on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe C.

Partie B. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*}$ par $g(x)=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|$. On note G sa courbe représentative.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.

2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.

3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif : $g(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$. Montrer que la droite D d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à D pour $x>0$.

4. Démontrer que, pour tout réel x strictement négatif : $g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$. Montrer que la droite d d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à d pour $x<0$.

5. Construire G, D et d.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$.

1. Soit φ la fonction définie sur $[0,2]$ par $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$.

   a) Étudier les variations de φ sur $[0,2]$.

   b) Montrer que, pour tout réel t de $[0,2]$: $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$.

   c) Par intégration, en déduire que $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\le u_n\le\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$.

   d) Montrer que, si (u_n) possède une limite l, alors $3\le l\le\frac{7}{2}$.

2.

   a) Calculer l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$.

   b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I\le u_n\le e^{\frac{2}{n}}I$. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite l.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_x^{2x}e^{-t^2}dt$.

1.

   a) Étudier la parité de f.

   b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

2.

   a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$.

b) Étudier les variations de f. Préciser les points où f admet un extremum.

c) Calculer $f''(x)$ et déterminer son signe.

d) Construire la courbe de f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à $0,3$).

Exercice 5

On note, pour tout réel $a>0$ et tout entier naturel n : $u_n(a)=\int_0^1 x^n e^{a(1-x)}\,dx$.

1. Calculer $u_0(a)$.
2. Soit $a>0$ donné.

   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n(a)<\dfrac{e^a}{n+1}$.

   b) Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante.

   c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a\,u_{n+1}(a)=-1+(n+1)u_n(a)$.

   b) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n(a)=\dfrac{n!}{a^{n+1}}\left[e^a-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}\right]$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $U_n=\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$.

1. Montrer que la fonction $f:t\mapsto(2-t)e^t$ est une primitive de $g:t\mapsto(1-t)e^t$ sur $[0,1]$. En déduire la valeur de U_1.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout n non nul : $U_{n+1}=(n+1)U_n-1$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $U_n\geq 0$.
4. a) Montrer que, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel non nul n : $(1-t)^n e^t\leq e(1-t)^n$.

   b) En déduire que, pour tout n non nul : $U_n\leq\dfrac{e}{n+1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 3 cm).

Partie A. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$. En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

c) Étudier la position relative de (C) et (Δ).

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B. Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

1. Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de $F(n)$.

2. Étudier le sens de variation de F sur $[0, +\infty[$.

3. Démontrer que, pour tout réel a strictement positif : $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4. Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3 que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1 + e^{-2x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

5. On admet que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un réel noté I. Établir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.

6. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $\ln\left(1 + e^{-2(n+1)}\right) \leq U_n \leq \ln\left(1 + e^{-2n}\right)$.

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

Exercice 8

On considère la fonction f définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x : $e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.

b) En écrivant l'égalité précédente pour $n=2$, puis pour $n=3$, montrer que, pour tout $x\geq 0$: $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq x-f(x)\leq\frac{x^2}{2}$.

Partie II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in]0,1]$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{u_n^2}=\frac{1}{2}$.

3. On pose $T_n=\sum_{k=0}^{n}u_k^2$. Montrer que la suite (T_n) est convergente et que sa limite L vérifie $2\leq L\leq 3$.

Partie III

1. On note φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(0)=1$ et, pour $x>0$, $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$. Montrer que φ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(0)=1$ et, pour $x>0$, $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)\,dt$.

a) Montrer que g est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x>0$: $1-\frac{x}{4}\leq g(x)\leq 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}$.

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner $g'(0)$.

3.

a) Montrer que, pour tout $x>1$: $\int_1^x\varphi(t)\,dt\leq\ln x$.

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4.

a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.

b) Montrer alors que, pour $x>0$: $xh'(x)=(x+1)e^{-x}-1$.

c) Étudier la fonction k définie sur $[0,+\infty[$ par $k(x)=(x+1)e^{-x}-1$.

d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.

e) Dresser le tableau de variation de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 9

Partie I. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}dx$.

1. Calculer u_0.
2. Justifier que $u_0+u_1=1$. En déduire u_1.
3. Montrer que la suite (u_n) est positive.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$.
   b) Calculer alors u_2.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Partie II

1. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on considère la fonction S_n définie sur $\mathbb{R}$ par $S_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1+e^x)}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Montrer que $S_n(x)$ est la somme de $n-1$ termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, où, pour tout entier naturel $n\geq 2$: $w_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(1-e^{-k})$.

Exercice 10

1. Montrer que, pour tout réel x, $e^x\geq 1+x$.
2. En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}$, et C sa courbe.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que C admet un point d'inflexion que l'on précisera.
3. Vérifier que $F(x)=-(x+1)e^{-x}$ est une primitive de f ; calculer l'aire A du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$.

Exercice 12

1. Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ admet une unique solution réelle α, et que $0 < \alpha < 1$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Montrer que $\alpha = \ln(2 - \alpha)$.