COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 — Fonction exponentielle

◆ Sommaire

1. Définition et propriétés
2. Étude de la fonction exponentielle
3. Dérivées et primitives
4. Puissances réelles

◆ Objectifs du chapitre

– Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle ; résoudre des équations et des inéquations.

– Calculer des limites à l'aide des croissances comparées.

– Dériver e^u, trouver les primitives de $u'e^u$.

– Manipuler les puissances réelles $a^b = e^{b\ln a}$ et les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^r$.

– Étudier des fonctions et des suites faisant intervenir l'exponentielle.

1 Définition et propriétés

◆ Définition

La fonction $\ln$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la **fonction exponentielle**, notée exp ou $x \mapsto e^x$:

$$\text{pour tout réel } x \text{ et tout réel } y>0 : y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y .$$

En particulier $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^x > 0$ pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$ pour tout réel x et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.

◆ Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}, e^{na} = \left(e^a\right)^n .$$

Pour tout entier $q \geq 2$ et tout entier relatif p : $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$ et $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

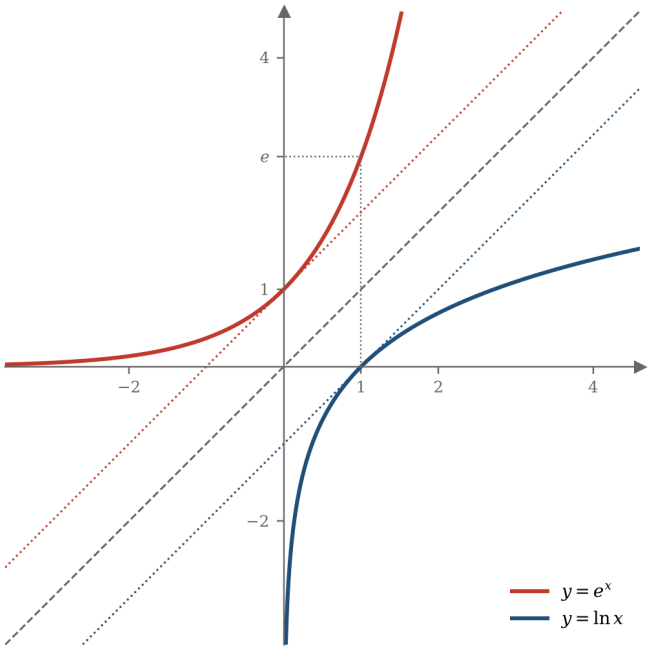
2 Étude de la fonction exponentielle

◆ Théorème

– La fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\left(e^x\right)' = e^x$.

– Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

– $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.



Les courbes de $\exp$ *et de* $\ln$ *sont symétriques par rapport à la droite* $y = x$. *Tangentes :* $y = x + 1$ *et* $y = x - 1$.

◆ Limites usuelles

Pour tous entiers naturels non nuls m et n :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0,\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

◆ À retenir

En $+\infty$, « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x ». Deux inégalités très utiles (exercice 1) : pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$; pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

3 Dérivées et primitives

◆ Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

– La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

– Les primitives sur I de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemples. $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x e^{-x^2}$; $\int_0^1 e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

4 Puissances réelles

◆ Définition

Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$. Ainsi $\ln\left(a^b\right) = b \ln a$.

◆ Propriétés

Pour tous réels strictement positifs a et b et tous réels c et d :

$$a^{c+d} = a^c \times a^d,\ a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d},\ \left(a^c\right)^d = a^{cd},\ a^c \times b^c = (ab)^c,\ \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

◆ Théorème

Fonction exponentielle de base a $(a > 0)$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto (\ln a)a^x$.

– Si $a > 1$: elle est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

– Si $0 < a < 1$: elle est strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Fonction puissance (r rationnel). La fonction $x \mapsto x^r = e^{r \ln x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto r x^{r-1}$. Si $r \neq -1$, ses primitives sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$.

– Si $r > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$. – Si $r < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$.

◆ Croissances comparées

Pour tout rationnel $r > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty.$$

◆ Attention

Pour étudier une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, on revient toujours à la définition : $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$, avec $u(x) > 0$.