EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 7 — Fonction logarithme népérien

Exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x+1$.
   a) Étudier le sens de variation de g.
   b) En déduire le signe de g.
2. On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.
   a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}$.
   a) Étudier les variations de f.
   b) En déduire que, pour tout $x\geq 0$: $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$.
   a) Étudier les variations de h.
   b) En déduire que, pour tout $x\geq 0$: $\ln(x+1)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.
3. Étudier la limite éventuelle en 0^+ de $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Montrer que f est continue. Étudier la parité de f et montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1]$.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et en 1.

1. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

2. Étudier la branche infinie de la courbe C_g.

Exercice 5

Soit n un entier naturel et g_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $g_n(x)=x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n$.

1. Montrer que g_n est continue sur $]0,1[$.
2. Montrer que g_n admet un prolongement par continuité f_n sur $[0,1]$.

Exercice 6

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$.

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n=1$.
   a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   b) En déduire les variations de f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n\geq 2$.
   a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. On précisera les limites aux bornes.

Exercice 7

I. On pose, pour tout entier $n\geq 1$: $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$.
2. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n\leq\ln n+1$.

II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$.

1.
   a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est bien défini et strictement positif.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2.
   a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2-u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n^2=2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n^2 \geq 2n+1$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}v_{n-1}$.

b) En utilisant la partie I, établir que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$.

c) En déduire $\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geq 3$: $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n - \frac{1}{2\ln 2} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln n}$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $\ln(\ln n)-\ln(\ln 2) \leq S_n \leq \ln(\ln n)-\ln(\ln 2)+\frac{1}{2\ln 2}$.

c) Calculer alors $\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n}{\ln(\ln n)}$.

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$ et $v_n = S_n - \ln(\ln n)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.

5.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln n}$.

b) En déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

Exercice 9

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1.

a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\int_{p}^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 1 + \ln n$.

2. On considère la fonction φ_1 définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi_1(x) = x(1 + \ln x)$ si $x > 0$. Montrer que φ_1 est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on pose $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$: $\varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$. On montrera que $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

4. Calculer b_n.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = n!\,a_n$.

a) Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $|c_n| \leq 1 + \ln n$.

c) Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Exercice 10

1. Soit $x > -1$. Démontrer que $\ln(1 + x) \leq x$.

2. Soit $k \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = \prod_{p=0}^{n} (1 + k^p)$.

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est majorée.

c) Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 11

Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. On sera amené à étudier les variations, puis le signe, des fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x+1}$.

Exercice 12

1. Étudier les variations de $f(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

3. On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que $H_n \geq \ln(n+1)$ et en déduire la limite de (H_n).

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f (limites en 0 et en $+\infty$ comprises).
2. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.
3. Comparer, sans calculatrice, les nombres e^{π} et π^{e}.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0. Est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variation de f. Résoudre $f(x) = 0$.
3. En déduire la valeur de $\int_1^e \ln x \, dx$.