COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

# Chapitre 7 — Fonction logarithme népérien

### ◆ Sommaire

1. Définition et propriétés algébriques
2. Étude de la fonction ln
3. Limites usuelles
4. Dérivées et primitives
5. Logarithme décimal

### ◆ Objectifs du chapitre

– Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien ; résoudre des équations et des inéquations.

– Calculer des limites faisant intervenir $\ln$, en particulier lever les indéterminations par les croissances comparées.

– Dériver $\ln u$, trouver les primitives de $\dfrac{u'}{u}$.

– Étudier une fonction comportant un logarithme, établir des inégalités.

– Étudier des suites à l'aide du logarithme et du calcul intégral.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 7).

## 1 Définition et propriétés algébriques

### ◆ Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en $1$ :

$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t},\ x>0.$$

Ainsi $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $]0,+\infty[$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\ln 1=0$.

### ◆ Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$ et tout entier relatif $n$ :

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b,\ln\frac{1}{b}=-\ln b,\ln(a^n)=n\ln a,\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a.$$

Plus généralement, $\ln(a_1a_2\cdots a_n)=\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n$ et, pour tout entier $n\geq 2$, $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$.

## 2 Étude de la fonction ln

### ◆ Théorème

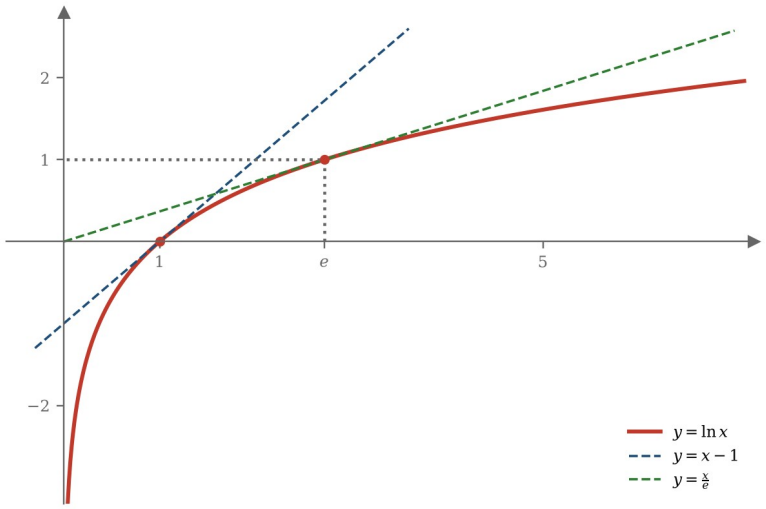
– La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$ : $\ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$ et $\ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$.

– $\ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$ ; $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ ; $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$.

– $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

– $\ln$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'unique réel dont le logarithme vaut $1$ est noté $e$ : $\ln e=1$ ($e\approx 2,718$).

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ | ‖ | | | $+$ | | | |
| $\ln x$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |




*Courbe de la fonction $\ln$, avec ses tangentes aux points d'abscisses $1$ et $e$. L'axe des ordonnées est asymptote ; en $+\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.*

## 3 Limites usuelles

### ◆ À retenir

Pour tous entiers naturels non nuls $n$ et $m$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}=0,\ \lim_{x\to 0^+}x^m(\ln x)^n=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$$

**◆ Méthode**

Les deux dernières limites sont des nombres dérivés ($\ln'(1)=1$). Les quatre premières traduisent les **croissances comparées** : en $+\infty$ et en $0^+$, « les puissances de $x$ l'emportent sur le logarithme ». Pour les utiliser, on met en facteur le terme prépondérant.

**Exemple.** $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty.$

## 4 Dérivées et primitives

**◆ Théorème**

Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$. La fonction $\ln u : x\mapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur $I$ et $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

Plus généralement, si $u$ est dérivable et ne s'annule pas sur $I$, alors $\ln|u|$ est dérivable sur $I$ et $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$.

**◆ Primitives**

Si $u$ est dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle $I$, les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur $I$ sont les fonctions $x\mapsto\ln|u(x)|+c$.

La fonction $x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0,+\infty[$.

**Exemples.** $\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=[\ln(x^2+1)]_0^1=\ln 2$ ; sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, une primitive de $\tan x=-\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ est $-\ln(\cos x)$.

## 5 Logarithme décimal

### ◆ Définition

La fonction **logarithme décimal**, notée $\log$, est définie sur $]0,+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. On a $\log 10 = 1$ et, pour tout entier relatif $n$, $\log\left(10^n\right) = n$. Elle possède les mêmes propriétés algébriques que $\ln$.