EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Intégrales

Exercices 1 à 6 : calculs d'intégrales et d'aires. Exercices 7 à 11 : suites d'intégrales. Exercices 12 à 16 : inégalités et fonctions définies par une intégrale. Exercices 17 et 18 : volumes. Exercices 19 à 22 : sommes et intégrales, problèmes de synthèse.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^4 |t-2|\,dt$ **b)** $\int_{-1}^2 (x-|x-1|)\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$ **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ **f)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(tx)\,dt$ (x réel fixé) **g)** $\int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}\,dx$ **h)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$ **j)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\,dt$ **k)** $\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt$ **l)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$

m) $\int_0^1 (2t+1)\sin\left(\pi\left(t^2+t+1\right)\right)dt$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^4 x$.

1. Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx$.

Exercice 3

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée f' est continue sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b x f'(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=bf(b)-af(a)$.
2. Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x)=4\sqrt{x}-x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, que l'on calculera.
2. Soit $a \in [0,4]$. Calculer les intégrales $I(a)=\int_0^a f(x)\,dx$ et $J(a)=\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy$.
3. Vérifier que $I(a)+J(a)=af(a)$. Interpréter géométriquement cette relation.

Exercice 5

On considère l'intégrale $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Calculer I_n en fonction de n.
4. En écrivant $x^n=(1-(1-x))^n$ et en utilisant la formule du binôme, donner une autre expression de I_n.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit f la fonction définie par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$. Étudier f et construire sa courbe ζ_1.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt$.
   a) Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $g'(x)=-4\sin^2 x$.
   b) Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note ζ_2 l'image de ζ_1 par la symétrie centrale de centre O et l'on pose $\zeta=\zeta_1\cup\zeta_2$. Construire ζ_2 et donner une équation cartésienne de ζ.

Exercice 7

La suite de Wallis est définie par $w_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n\,dt$, où n est un entier naturel.

1. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n : $w_n\geq 0$. En déduire que la suite (w_n) est convergente.
4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $w_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}w_n$.
5. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $w_{2n}=\frac{\pi C_{2n}^n}{2\times 4^n}$ et $w_{2n+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n : $0<\dfrac{2n+1}{2n+2}\leq\dfrac{w_{2n+1}}{w_{2n}}\leq 1$. En déduire que $\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1}}{w_{2n}}=1$.

7. Établir la formule de Wallis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n=(n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 8

Soit $I_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n\geq1$: $(2n+1)I_n=-2nI_{n-1}$.
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 9

p et q étant deux entiers naturels, on pose $B(p,q)=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Établir la relation $B(p,q)=\dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$ pour $p\geq1$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; en déduire $B(p,q)$.

Exercice 10

Pour n entier naturel non nul, on définit la suite (S_n) par $S_n=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

1. Justifier, pour k entier naturel non nul, l'encadrement $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\leq\int_k^{k+1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}\leq\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$.
2. En déduire l'encadrement $\int_1^{n+1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}\leq S_n\leq\int_1^n\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}+1$.
3. Que peut-on dire de la suite (S_n) ?
4. À l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par $T_n=1+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ est convergente.

Exercice 11

On définit la suite (u_n) par $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}t\,dt$, $n\in\mathbb{N}$.

1.

a) Rappeler la dérivée de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) Calculer alors u_0.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+3}$.

4. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{2(2n+3)}\le u_n\le\frac{1}{2(2n+1)}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n$.

5. On pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\frac{\pi}{4}+(-1)^n u_n$.

b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(xy)}{x}dx$.

1. Justifier l'existence de $f(y)$ pour tout réel y.
2. Montrer, en utilisant la formule de la moyenne, que si a et b sont deux réels tels que $a<b$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos c$.
3. Montrer que, pour tous réels a et b : $|\sin b-\sin a|\le|b-a|$ et $|\cos b-\cos a|\le|b-a|$.
4. Soit $y_0\in\mathbb{R}$. On pose $A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x\,y_0)dx$. Montrer que $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}-A\right)=0$. En déduire que f est dérivable en y_0 et exprimer $f'(y_0)$.

Exercice 13

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$.

1.

a) Quel est le signe de $\int_a^b[f(t)+xg(t)]^2dt$, où x désigne un nombre réel ?

b) En déduire l'inégalité suivante, dite de Schwarz : $[\int_a^b f(t)g(t)dt]^2\le\int_a^b f(t)^2dt\times\int_a^b g(t)^2dt$.

2. Démontrer que si f et g sont positives sur $[a,b]$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x)g(x)\ge1$, alors $\int_a^b f(x)dx\times\int_a^b g(x)dx\ge(b-a)^2$.

Exercice 14

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$.

1. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que, pour tout x de $[a,b]$: $m\leq f(x)\leq M$.
2. Démontrer que si g garde un signe constant sur $[a,b]$ et si $\int_a^b g(t)\,dt\neq 0$, alors $m\leq \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}\leq M$.

Exercice 15

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a<b$.

1. Justifier l'existence d'un réel M tel que, pour tout x de $[a,b]$, $|f(x)|\leq M$, et d'un réel x_0 de $[a,b]$ tel que $|f(x_0)|=M$.

Par la suite, on suppose que $M>0$ et l'on pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $J_n=\int_a^b |f(t)|^n\,dt$.

2. Prouver que $J_n\leq (b-a)M^n$.
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sqrt[n]{J_n}\leq M\sqrt[n]{b-a}$.
4. Démontrer que, quel que soit le réel ε tel que $0<\varepsilon<M$, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, avec $\alpha<\beta$, tel que, pour tout x de $[\alpha,\beta]$: $|f(x)|\geq M-\varepsilon$.
5. En déduire que $J_n\geq (M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)$.
6. Montrer que, pour tout réel $c>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{c}=1$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{J_n}=M$.

Exercice 16

Soit a un entier naturel non nul. On pose $f(a)=\int_0^1 \sqrt{1-x^a}\,dx$.

1. Prouver que, pour tout $x\in[0,1]$: $1-x^a\leq\sqrt{1-x^a}\leq 1-\dfrac{1}{2}x^a$.
2. En déduire que $\dfrac{a}{1+a}<f(a)<\dfrac{2a+1}{2a+2}$. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$.

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Soit $C=\{M(x,y);\ y=\sqrt{1-x^2},\ -1\leq x\leq 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.
2. Soit $C=\{M(x,y);\ xy=1,\ 1\leq 2x\leq 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

3. Déterminer le volume du cylindre engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du segment d'équation $y=R$, $0\leq x\leq h$, avec $h>0$ et $R>0$.

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer le volume du solide S dans chacun des cas suivants.

1. S est défini par : $|x|+|y|\leq 2-\frac{2}{3}z$ et $0\leq z\leq 3$.
2. S est défini par : $\sup(|x|,|y|)\leq 1$ et $0\leq z\leq 1$.
3. S est défini par : $x^2+y^2+z^2\leq 1$.
4. S est une boule de rayon R.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et l'on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $s_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1. Vérifier que f est décroissante et positive.
2. Montrer que (s_n) est croissante.
3. Calculer $\int_1^n f(t)\,dt$ pour $n\geq 1$; en déduire que $0\leq\int_1^n f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(t)\,dt$.
4. Montrer que, pour tout entier $k\geq 2$: $\int_k^{k+1} f(t)\,dt\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.
5. En déduire que, pour $n\geq 2$: $\int_2^{n+1} f(t)\,dt\leq s_n-f(1)\leq\int_1^n f(t)\,dt$.
6. En déduire que (s_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 20

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,+\infty[$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=\int_0^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ et $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1 f(x)\,dx$.
2. Montrer que, pour tout entier k vérifiant $0\leq k\leq n$: $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire l'encadrement $I_n+\frac{1}{n}[f(0)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)]\leq s_n\leq I_n$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Application. On prend $f(x)=x^p$, où p est un entier tel que $p\geq 2$. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$.

Exercice 21

Pour tout entier naturel n, on définit les nombres $x_n=\int_0^1 t^n\cos t\,dt$ et $y_n=\int_0^1 t^n\sin t\,dt$.

1. Calculer x_0 et x_1.
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont décroissantes et positives.
3. Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout entier naturel n : $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin 1$ et $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos 1$.
4. En déduire que $\lim y_n=\lim x_n=0$, $\lim n x_n=\cos 1$ et $\lim n y_n=\sin 1$.

Exercice 22

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in]0,\pi]$. On pose $s_n=1+e^{it}+\ldots+e^{i(n-1)t}$.
   a) Donner, en fonction de n et t, une autre expression de s_n.
   b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cos\dfrac{(n+1)t}{2}$.
   c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\cos kt=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt$.
   a) Calculer $\int_0^{\pi}t\cos(nt)\,dt$. b) Calculer $\int_0^{\pi}t^2\cos(nt)\,dt$. c) En déduire que $I_n=\dfrac{1}{n^2}$.
3. Montrer que $\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=1+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.
4. Soit $x>0$ et φ une fonction dérivable sur $[0,\pi]$ dont la dérivée φ' est continue sur $[0,\pi]$.
   a) Intégrer une fois par parties $\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\,dt$.
   b) Montrer que $\left|\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(xt)\,dt\right|\leq\int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\,dt$.
   c) En déduire que $\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\,dt\right|\leq\dfrac{1}{x}\left[|\varphi(0)|+|\varphi(\pi)|+\int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\,dt\right]$.

d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,dt = 0.$

5. On pose $\varphi(t) = \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{\sin\dfrac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $\varphi(0) = -2.$

a) Montrer que φ est continue sur $[0, \pi]$.

b) On admet que φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée φ' est continue sur $[0, \pi]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt.$$

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$