COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 6 — Intégrales

◆ **Sommaire**

1. Intégrale d'une fonction continue
2. Intégrale et aire
3. Intégrales et inégalités
4. Valeur moyenne
5. Intégration par parties
6. Fonctions définies par une intégrale
7. Calcul de volumes

◆ **Objectifs du chapitre**

– Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties.

– Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et la comparaison.

– Encadrer une intégrale, étudier une suite définie par une intégrale.

– Étudier une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$.

– Calculer une aire plane, une valeur moyenne, le volume d'un solide de révolution.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 6).

1 Intégrale d'une fonction continue

◆ **Définition**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale de f entre a et b** le réel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Ce réel ne dépend pas de la primitive choisie. La variable est « muette » : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

◆ **Conséquences immédiates**

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

◆ Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c de I : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

◆ Linéarité

Si f et g sont continues sur $[a,b]$, pour tous réels α et β : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

2 Intégrale et aire

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

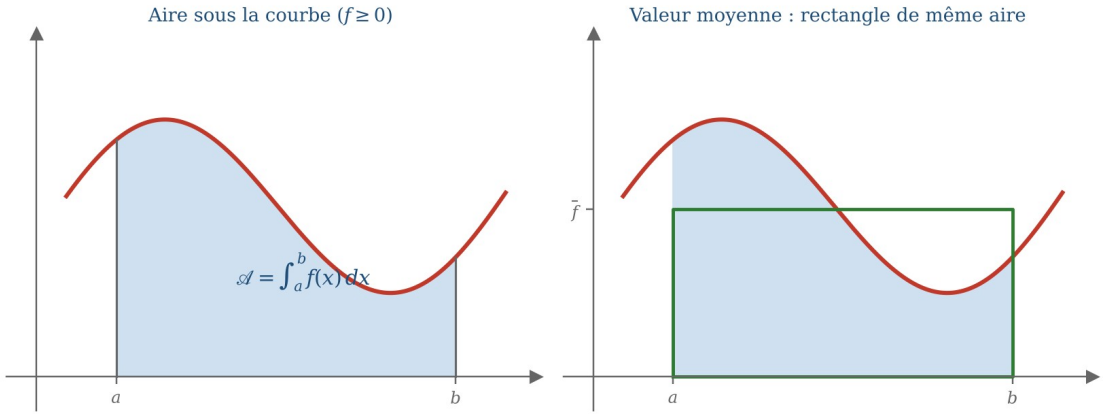
◆ Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ ($a<b$). L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est

$$A = \int_a^b |f(x)|dx.$$

En particulier, si f est positive sur $[a,b]$, $A = \int_a^b f(x)dx$.

Si f et g sont continues sur $[a,b]$, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites $x=a$, $x=b$ est $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.



Intégrale, aire et valeur moyenne.

3 Intégrales et inégalités

Dans ce paragraphe, $a \leq b$.

◆ Positivité

Si f est continue et positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

◆ Corollaire

Si $a < b$, si f est continue, positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

◆ Comparaison

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

◆ Valeur absolue

Si f est continue sur $[a, b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

◆ Attention

Ces résultats supposent les bornes « dans le bon sens » ($a \leq b$). Si $a > b$, les inégalités changent de sens.

4 Valeur moyenne

◆ Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. La **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le réel $\overline{f}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

◆ Inégalité de la moyenne

Si $m\le f(x)\le M$ pour tout x de $[a,b]$, alors $m\le\overline{f}\le M$, c'est-à-dire

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

◆ Corollaire (formule de la moyenne)

Si f est continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $\overline{f}=f(c)$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$.

5 Intégration par parties

◆ Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Exemple. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$: on pose $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$, d'où $u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$. Alors

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+0=\pi.$$

◆ Méthode

On choisit pour u le facteur qui se simplifie par dérivation (polynôme) et pour v' celui dont on connaît une primitive. Pour une suite d'intégrales (I_n), une intégration par parties fournit en général une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} ou I_{n-2}.

6 Fonctions définies par une intégrale

◆ Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est **la primitive de f sur I qui s'annule en a** : elle est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$.

◆ Théorème

Soit de plus u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$. La fonction $G : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et

$$G'(x) = u'(x) f(u(x)).$$

◆ Parité, périodicité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et $a \in I$.

– Si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$. – Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.

– Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$ pour tout réel a.

7 Calcul de volumes

◆ Solide de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume (en unités de volume) du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{i})$ de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

◆ Plus généralement (admis)

Si un solide est compris entre les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ et si l'aire $S(z)$ de sa section par le plan de cote z est une fonction continue de z, alors $V = \int_a^b S(z)\,dz$.