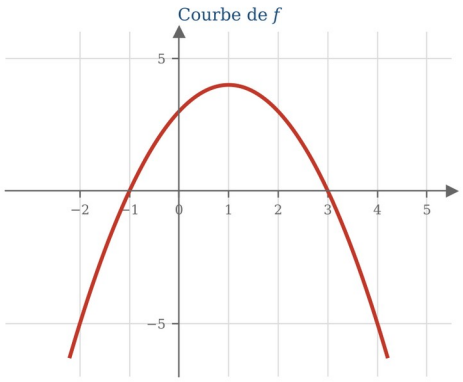
EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

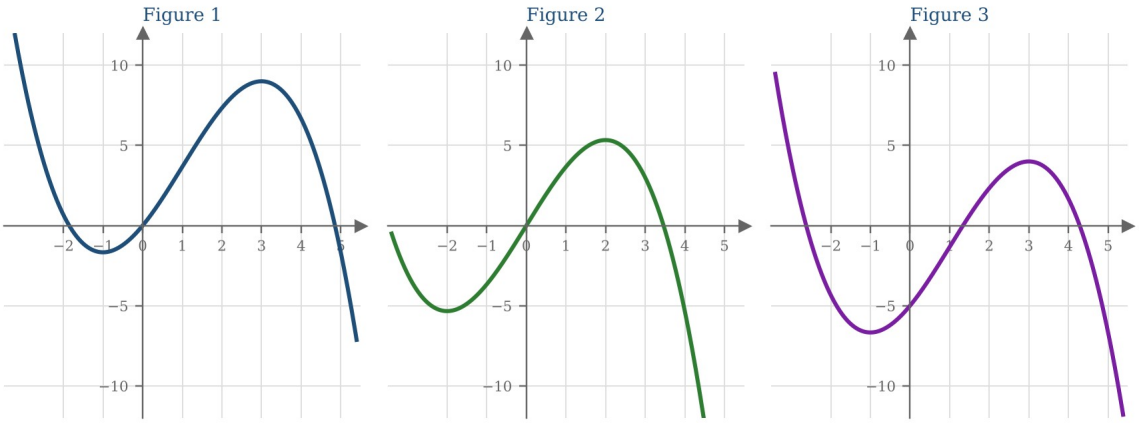
Chapitre 5 — Primitives

Exercice 1

La parabole ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.



Exercice 2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto (2x+1)\left(x^2+x+1\right)$; $I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto (2x+1)\sin\left(x^2+x+1\right)$; $I = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = \mathbb{R}$

6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$

7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$

8. $f : x \mapsto \cos x \cos 2x$; $I = \mathbb{R}$

9. $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

10. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

Exercice 3

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x : $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$.
2. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sin x$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$, où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Exprimer $f''(x) + 9f(x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$.

1. Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$: $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]-2,2[$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty,2[$ par $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de I : $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

Exercice 8

1. Déterminer une primitive sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\cos^2 x}$.
2. On considère la fonction G définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $G(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que G est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et que $G'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$.
3. En déduire une primitive sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ de la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$ par $f(x)=(x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x : $x^2=\frac{(3-2x)^2}{4}-\frac{3(3-2x)}{2}+\frac{9}{4}$.
2. Déterminer alors la primitive de f sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$ qui s'annule en 1.

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F la primitive de f vérifiant $F(0)=0$.
2. Étudier la parité de F et préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de la fonction $x\mapsto F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x>0$: $F(x)=c-F\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=c$.
6. On pose, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g(x)=\tan x$.
   a) Montrer que la fonction $\varphi:x\mapsto F\circ g(x)-x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) En déduire que, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$: $F\circ g(x)=x$.
   c) Déterminer alors $F(1)$, $F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
   d) Montrer que $c=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1.
   a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
2. Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ telle que $F(0)=0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.
   a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0,+\infty[$?
   b) Quelles sont les variations de F sur $[0,+\infty[$?
3. On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions H et K par $H(x)=F(x)-x$ et $K(x)=F(x)-\dfrac{2}{3}x$.
   a) Étudier, sur $[0,+\infty[$, les variations de H et K.
   b) En déduire que, pour tout $x\geq 0$: $\dfrac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.
   c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4.
   a) Démontrer que l'équation $F(x)=\pi$ admet une solution unique α sur $[0,+\infty[$.
   b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi\leq\alpha\leq\dfrac{3}{2}\pi$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

1. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
2. Montrer que, pour tout réel x, $0\leq F(x)<\dfrac{1}{2}$.

Exercice 13

1. Montrer que, pour tout réel x, $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$.
2. En déduire une primitive de $x\mapsto\sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Retrouver ce résultat en écrivant $\sin^3 x=\sin x-\sin x\cos^2 x$, et vérifier que les deux primitives obtenues sont égales.

Exercice 14

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. Soit g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^3}$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que $g(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

b. En déduire la primitive G de g sur $]-1,+\infty[$ telle que $G(0)=0$.