COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 — Primitives

Sommaire

1. Primitives d'une fonction continue
2. Primitives des fonctions usuelles
3. Opérations sur les primitives

Objectifs du chapitre

– Vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle.

– Déterminer les primitives des fonctions usuelles et reconnaître les formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'\cos u$, $u'\sin u$, $u'v+uv'$, $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

– Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un réel donné.

– Transformer une expression (linéarisation, décomposition) pour en trouver une primitive.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 5). Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle.

1 Primitives d'une fonction continue

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$ pour tout x de I.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

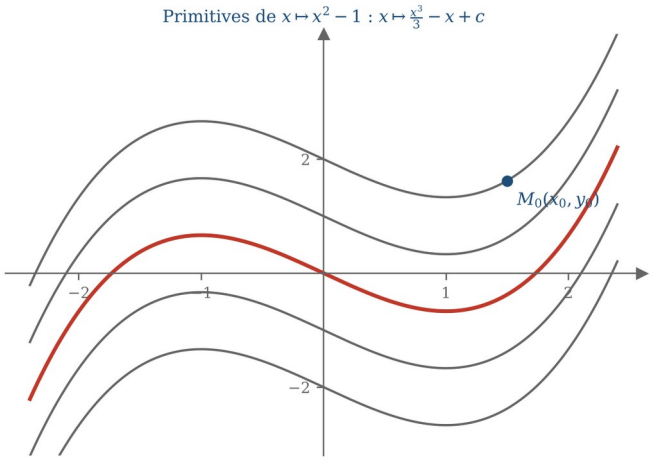
Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.

Ainsi, si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions $x\mapsto F(x)+c$, où c est une constante réelle.

◆ Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel. Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.



Les courbes des primitives d'une même fonction se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur colinéaire à $\vec{j}$; une seule passe par un point M_0 donné.

◆ Attention

Ces résultats ne sont valables que sur un **intervalle**. Ainsi les primitives de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ se déterminent séparément sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

2 Primitives des fonctions usuelles

Dans ce tableau, c désigne une constante réelle, a, ω et φ des réels avec $\omega\neq 0$.

Fonction f	Intervalle I	Primitives F
$x\mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto ax+c$
$x\mapsto x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$x\mapsto\dfrac{1}{x^n}, n\geq 2$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$	$x\mapsto\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	$x\mapsto 2\sqrt{x}+c$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$x\mapsto\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+c$
$x\mapsto\cos x$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto\sin x+c$
$x\mapsto\sin x$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto-\cos x+c$

Fonction f	Intervalle I	Primitives F
$x \mapsto \cos(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega x+\varphi)+c$
$x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x+\varphi)+c$
$x \mapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x+c$

3 Opérations sur les primitives

◆ Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur un intervalle I.

– La fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

– Pour tout réel λ, la fonction λF est une primitive de λf sur I.

◆ Attention

Il n'existe pas de formule pour la primitive d'un produit ou d'un quotient : FG n'est pas une primitive de fg.

Les formules de dérivation, lues « à l'envers », donnent le tableau suivant, où u et v sont des fonctions dérivables sur I.

Fonction	Une primitive	Condition
$u'u^n, n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}, n\geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	
$u'v+uv'$	uv	
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	v ne s'annule pas sur I
$u'\times(v'\circ u)$	$v\circ u$	v dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$

◆ Méthode — déterminer une primitive

1. Chercher une forme du tableau en identifiant u puis en calculant u' ; ajuster la constante multiplicative : si $f = k\,u'\,u^n$, alors $F = k\,\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.
2. À défaut, transformer l'expression : développer, décomposer, ou **linéariser** un produit trigonométrique à l'aide de

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)],\ \sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)],$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)],\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

3. Toujours vérifier en dérivant le résultat.

Exemple 1. $f(x) = x(x^2+1)^4$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$: $f = \dfrac{1}{2}u'u^4$. Les primitives de f sont $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)^5}{10} + c$.

Exemple 2. $f(x) = \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$, donc les primitives sont $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$.

Exemple 3. La primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$ telle que $F(1) = 3$: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$ et $F(1) = -1 + c = 3$ donne $c = 4$, soit $F(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$.