EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Fonctions réciproques

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $[0, a]$ par $f_a(x) = \dfrac{a - x}{a(a + x)}$.

1. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0, a]$ sur $[0, \dfrac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa réciproque.
2. Donner le tableau de variation de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.
3. Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ?
4. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in]\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}[$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f.
3. Montrer que f est une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ par $f(x)=1+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On note C sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; interpréter les résultats.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat.
4. Montrer que, pour tout $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$: $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
7. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
8. Représenter dans le même repère la courbe C et la courbe C' de f^{-1}.

Partie B. Soit g la fonction définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f(\cos x)$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}[$: $g(x)=1+\tan x$.
2. Étudier le sens de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x)=2-x$ admet une unique solution α dans $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ et vérifier que $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.
4. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
5. Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que, pour tout $x\in K$: $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Montrer que, pour tout x de J : $f^{-1}(x)=\dfrac{1+x^2}{2x}$.

6. On désigne par C et C' les courbes de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé. Montrer que la droite $D: y=2x$ est une asymptote oblique à C.
7. Tracer C et C'.
8. Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.
   a) Montrer que, pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$: $g(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}$.
   b) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que, pour tout x de K : $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{2}{1+x^2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+12x+1$ si $x\leq 0$ et $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ si $x>0$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,0]$ une solution unique α. Vérifier que $\alpha\in]-\frac{1}{12},0[$.
6. Soit g la restriction de f à $]0,+\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J.
   c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ si $x>0$ et $f(x)=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ si $-\frac{\pi}{4}\leq x\leq 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Soit g la restriction de f à $[-\frac{\pi}{4},0]$.
   a) Montrer que g est une bijection de $[-\frac{\pi}{4},0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}, puis expliciter $\left(g^{-1}\right)'(x)$.
3.
   a) Montrer que l'équation $g(x)+x=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-\frac{\pi}{4},0[$.

b) En déduire que le point $I(-\alpha,\alpha)$ appartient à la fois à la courbe de g^{-1} et à la droite $D: y=-x$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x)=h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
   a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) En déduire que, pour tout $x\in[0,1[$: $\varphi(x)=\frac{\pi}{4}+h(x)$.
4. Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par $g(x)=h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-(1+2x)h(x)$.
   a) Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b) Étudier les variations de g' sur $[0,1[$, puis en déduire celles de g.
   c) En déduire qu'il existe un unique réel $c\in]\frac{1}{4},1[$ tel que $c=\tan\frac{\pi}{8c}$.
5.
   a) Montrer que l'équation $h(1-x)=2h(x)$ admet au moins une solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que α vérifie : $\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1=0$.

Exercice 10

Soit $f: x\mapsto\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{3}]$ par $f(x)=\sqrt[3]{2\cos x-1}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $[0,\frac{\pi}{3}]$.
2. Montrer que f est une bijection de $[0,\frac{\pi}{3}]$ sur $[0,1]$.

3. Soit f^{-1} la réciproque de f. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$.
4. Préciser le domaine K de dérivabilité de f^{-1}.
5. Déterminer l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de K.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

1. Soit $x\in]0,+\infty[$. Montrer que, pour tout $\beta\in[x,x+1]$: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\leq f'(\beta)\leq\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$.
2. En déduire que, pour tout $x\in]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\leq f(x+1)-f(x)\leq\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\leq 0\\ 2x^2 & \text{si } 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x+\sqrt{2x-1} & \text{si } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Établir que

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x} & \text{si } x\leq 0\\ \sqrt{\dfrac{x}{2}} & \text{si } 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x+1-\sqrt{2x} & \text{si } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $]0,\dfrac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que f est une bijection de $]0,\dfrac{\pi}{2}]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. On désigne par g la fonction réciproque de f. Calculer $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.
4. Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x>1$: $g'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$. La fonction g est-elle dérivable en 1 ?

5. Soit h la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par $h(x)=f(x)+\frac{1}{4}$. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une solution unique x_0, et que $\frac{\pi}{3}<x_0<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 15

Partie I. On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$.

1. Montrer que g n'est pas dérivable à droite en 0.
2. Étudier les variations de g et en déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x\in I$.
4. Vérifier que, pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$: $g\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\tan x}$.

Partie II. On considère la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=2\sqrt{\tan x}-1$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. Montrer que, pour tout x de $]0,\frac{\pi}{2}[$: $f'(x)>1$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une solution unique α et vérifier que $\alpha\in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$.
5. En déduire le signe de $f(x)-x$.
6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\alpha$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Partie III. On considère la fonction φ définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $\varphi(x)=\sqrt{\tan x}$.

1. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J' que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$: $(\varphi^{-1})'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$.
3. Calculer $\varphi^{-1}(1)$ et montrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$: $\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

Partie I. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α et que $\alpha>\dfrac{4}{5}$.
3. En déduire le signe de $f(x)-x$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que, pour tout réel x : $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.

Partie II. Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in[0,\alpha]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.

1.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le\alpha$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que, pour tout $x\ge 0$: $|(f^{-1})'(x)|\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$.
4. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n|u_0-\alpha|$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Partie III. Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h(x)=f\left(-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $]-1,1[$: $h(x)=-1-\tan\dfrac{\pi x}{2}$.
2. Montrer que h établit une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{-1})'(x)=\dfrac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$.
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $H(x)=h^{-1}(x-1)+h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.
   a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $H'(x)$.
   b) Calculer $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire que $H(x)=-1$ si $x>0$ et $H(x)=1$ si $x<0$.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[h^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)+h^{-1}\left(-\dfrac{1}{k}\right)\right]$ et $w_n=\dfrac{v_n}{n}$.

a) Donner la valeur de $H\left(1+\frac{1}{k}\right)$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)=-1$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n=-n-h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la suite $\left(w_n\right)$ est convergente et donner sa limite.