COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 4 — Fonctions réciproques

◆ **Sommaire**

1. Bijection, fonction réciproque
2. Dérivabilité de la fonction réciproque
3. Fonction racine n-ième

◆ **Objectifs du chapitre**

– Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J et déterminer J.

– Expliciter, lorsque c'est possible, la fonction réciproque.

– Étudier la continuité, la monotonie et la dérivabilité d'une fonction réciproque ; calculer $\left(f^{-1}\right)'(b)$ sans expliciter f^{-1}.

– Tracer la courbe de f^{-1} à partir de celle de f.

– Utiliser les fonctions racine n-ième : calculs, limites, dérivées.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 4).

1 Bijection, fonction réciproque

◆ **Définition**

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f **réalise une bijection** de I sur $f(I)$ si, pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

La fonction qui à tout y de $f(I)$ associe cette unique solution est la **fonction réciproque** de f, notée f^{-1} :

$$\left(x\in I \text{ et } y=f(x)\right)\Leftrightarrow\left(y\in f(I) \text{ et } x=f^{-1}(y)\right).$$

En particulier $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ pour tout $x\in I$ et $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ pour tout $y\in f(I)$.

◆ **Théorème**

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

◆ **Théorème**

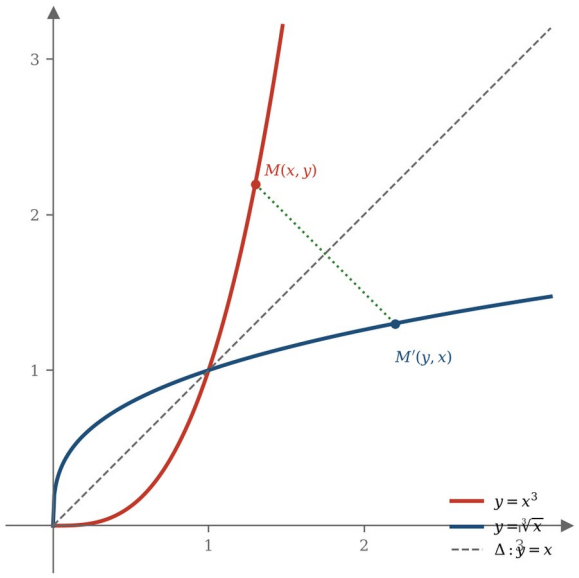
Si f est **continue** et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

– $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (chapitre 1) ;

– sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, et varie dans le même sens que f.

◆ Conséquence

Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à Δ.

◆ Méthode

Méthode — montrer que f réalise une bijection de I sur J.

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Justifier que f est strictement monotone sur I (signe de f').
3. Déterminer $J = f(I)$ à l'aide des valeurs ou des limites de f aux bornes de I.

Méthode — expliciter f^{-1}. Pour $y \in J$, résoudre dans I l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; ne pas oublier les conditions de signe lorsqu'on élève au carré.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ sur $I =]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$. f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{-1}{(2x+1)^2} < 0$: f est continue et strictement décroissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I sur

$$J =]\lim_{x \to +\infty} f(x),\ \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)[=]\frac{1}{2}, +\infty[.$$

Pour $y \in J$ et $x \in I$: $y = \dfrac{x+1}{2x+1} \Leftrightarrow 2xy + y = x + 1 \Leftrightarrow x(2y-1) = 1 - y \Leftrightarrow x = \dfrac{1-y}{2y-1}$. Donc, pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$.

2 Dérivabilité de la fonction réciproque

◆ Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ce résultat reste valable pour une dérivée à droite ou à gauche en a.

◆ Corollaire

Si f est une bijection de I sur $f(I)$, dérivable sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ pour tout y de $f(I)$.

◆ Interprétation graphique

Par symétrie par rapport à Δ :

– si $f'(a) = 0$ (tangente horizontale en $A(a,b)$), la courbe de f^{-1} a une tangente **verticale** en $A'(b,a)$: f^{-1} n'est pas dérivable en b ;

– si C_f a une demi-tangente verticale en $A(a,b)$, la courbe de f^{-1} a une demi-tangente **horizontale** en $A'(b,a)$: f^{-1} est dérivable (à droite ou à gauche) en b, de nombre dérivé 0.

3 Fonction racine n-ième

◆ Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa réciproque, strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, est la fonction **racine n-ième**, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs x et y : $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$. Ainsi $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$; de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

◆ Règles de calcul

Soit $n \geq 2$ et $p \geq 2$ deux entiers, a et b deux réels positifs.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b>0), \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}, \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}, \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}.$$

◆ Théorème (dérivation)

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I, dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) > 0$, et sa dérivée est $\frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$.

Équation $x^n = a$ ($n \geq 2$, a réel).

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n **pair**	deux solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$	une solution : 0	aucune solution
n **impair**	une solution : $\sqrt[n]{a}$	une solution : 0	une solution : $-\sqrt[n]{-a}$

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ sur $I = [2, +\infty[$. La fonction $u : x \mapsto x-2$ est continue et positive sur I, donc f est continue sur I ; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Enfin f est strictement croissante sur I comme composée de deux fonctions strictement croissantes ; sur $]2, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.