EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Dérivabilité

Exercice 1

On définit la fonction f, périodique de période 1, par la donnée de sa restriction à $[0,1[$: $f(x)=2x^3+bx^2+cx$, où b et c sont deux réels.

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (On discutera suivant les valeurs de b et c.)

Exercice 2

Comparer, sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, les réels $0,9\tan x$ et $\tan(0,9x)$.

Exercice 3

Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe un réel $c\in]p,p+1[$ tel que $\cos(p+1)=\cos p-\sin c$.

Exercice 4

Montrer que :

1. pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$: $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$;
2. pour tout x de $[0,\frac{\pi}{4}]$: $x\le\tan x\le\frac{4}{\pi}x$;
3. pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$: $1-\frac{2}{\pi}x\le\cos x\le\frac{\pi}{2}-x$;
4. pour tout x de $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$: $\frac{\pi}{2}-2x\le cotan\,x-1\le\frac{\pi}{4}-x$;
5. pour tout $x>0$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6. $\frac{\sqrt{2}}{12}\le\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}\le\frac{\sqrt{3}}{12}$. (Indication : considérer la fonction sinus sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$.)

Exercice 5

Montrer que, pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$: $2\sin x+\tan x\ge 3x$.

Exercice 6

Soit $a>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynôme P_n définie par $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k-a$.

1. Montrer que l'équation $P_n(x)=0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \leq a$.
2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note l sa limite. Prouver que $0 \leq l < 1$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel x_n est solution de l'équation $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$. En déduire que $l = \dfrac{a}{a+1}$.

Exercice 7

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1.
   a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   b) Calculer u_1 et u_2.
   c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
2.
   a) Montrer que, pour tout x de $]0,1[$: $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.
3.
   a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Donner enfin la valeur de l.

Exercice 8

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x : $f'(x) = af(x+b)$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel x : $f^{(n)}(x) = a_n f(x+b_n)$, où (a_n) est une suite géométrique et (b_n) une suite arithmétique.
2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n, a et b.
3. Trouver un exemple de fonction f non nulle vérifiant l'hypothèse.

Exercice 9

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a<b$), dérivables sur $]a,b[$, telles que $f(a)=g(b)$ et $f(b)=g(a)$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0)=g(x_0)$.
2. Montrer qu'il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que $f'(x_1) = -g'(x_1)$.

Exercice 10

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout x de $]a,b[$.

1. Montrer que $g(a)\neq g(b)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(x)=f(x)-f(a)-\omega\big(g(x)-g(a)\big)$, où $\omega\in\mathbb{R}$. Calculer ω pour que $h(b)=0$.
3. La valeur de ω étant celle de la question 2, prouver qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
4. En déduire que si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, alors $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$.
5. Appliquer ce résultat pour calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

Exercice 11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire, alors il existe un réel a tel que $f'(a)=0$.
2. Montrer que si f est impaire, alors il existe un réel b tel que $f''(b)=0$.

Exercice 12

On donne un réel $t>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction $x\mapsto x^n-t(1-x)$.

1. Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. On note u_n cette solution.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(u_n)=-t(1-u_n)^2$.
3. En déduire que (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,2]$ par $f(x)=x\sqrt{2-x}$, et C sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2 ; interpréter graphiquement.
2. Montrer que, pour tout $x<2$, $f'(x)=\dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$. Dresser le tableau de variation de f (on calculera $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$).
3. Écrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Exercice 14

1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t\mapsto\sqrt{1+t}$ sur $[0,x]$, montrer que, pour tout réel $x\geq 0$:

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}.$$

2. En déduire un encadrement de $\sqrt{1,01}$ d'amplitude inférieure à 10^{-4}.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que f est dérivable et que $f' = 1 + f^2$. En déduire que f est deux fois dérivable et exprimer f'' en fonction de f.
2. Étudier le signe de f'' ; préciser le point d'inflexion de la courbe et la tangente en ce point.
3. En étudiant $g(x) = \tan x - x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que $\tan x \geq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.