COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 3 — Dérivabilité

Sommaire

1. Dérivabilité en un réel
2. Calcul des dérivées
3. Théorème de Rolle. Accroissements finis
4. Dérivée et variations
5. Point d'inflexion

Objectifs du chapitre

– Étudier la dérivabilité d'une fonction en un réel et interpréter graphiquement le résultat (tangente, demi-tangentes, point anguleux).

– Calculer la dérivée d'une fonction, en particulier d'une fonction composée.

– Appliquer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.

– Établir des inégalités à l'aide des accroissements finis ou de l'étude d'une fonction auxiliaire.

– Étudier les variations d'une fonction, rechercher ses extrema et ses points d'inflexion.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 3).

1 Dérivabilité en un réel

1. Nombre dérivé, tangente

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que f est **dérivable en** a s'il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ ou encore } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Le réel $f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a.

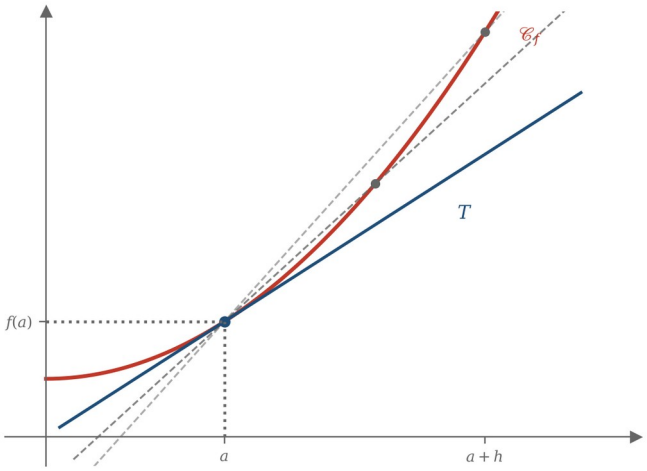
Théorème

Si f est dérivable en a, alors :

– f est continue en a ;

– la courbe C_f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$, d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$;

– pour h voisin de 0, $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ (approximation affine de f au voisinage de a).



Le nombre dérivé est la limite des coefficients directeurs des sécantes.

◆ Attention

La réciproque du premier point est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

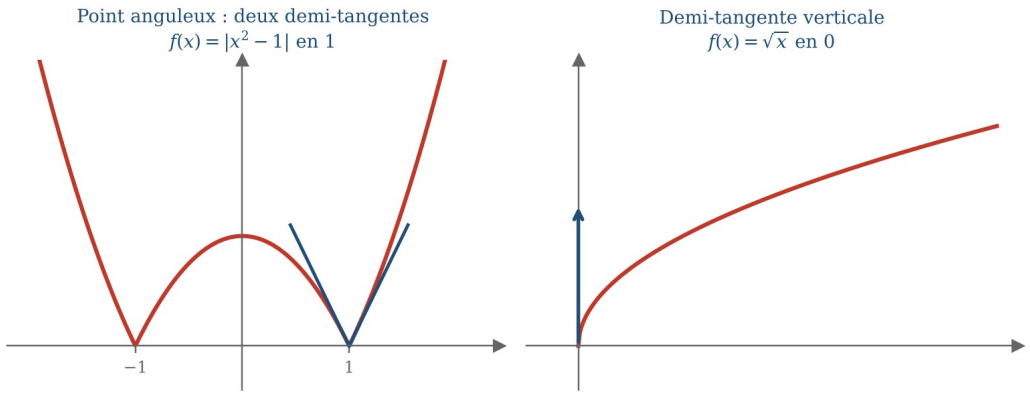
2. Dérivabilité à droite, à gauche

◆ Définition

f est **dérivable à droite** en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque $x \to a^+$; cette limite est notée $f'_d(a)$. On définit de même $f'_g(a)$.

f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Résultat pour $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$	Interprétation graphique au point $A(a, f(a))$
limite finie $f'(a)$ en a	tangente de coefficient directeur $f'(a)$
limites finies différentes à droite et à gauche	deux demi-tangentes : A est un **point anguleux**
limite infinie à droite (ou à gauche)	demi-tangente **verticale**



Deux situations de non-dérivabilité.

◆ Dérivabilité sur un intervalle

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en tout réel de $]a,b[$; elle est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

2 Calcul des dérivées

1. Dérivées usuelles et opérations

Fonction	Dérivée	Validité
$x \mapsto k$ **(constante)**	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Opération	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
αu (α **réel**)	$\alpha u'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

2. Dérivée d'une fonction composée

◆ Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a)).$$

◆ Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$.

Fonction	Dérivée	Condition
$u^n, n\in\mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	u dérivable
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u dérivable et $u>0$
$x\mapsto f(ax+b)$	$x\mapsto af'(ax+b)$	f dérivable
$\sin u$	$u'\cos u$	u dérivable
$\cos u$	$-u'\sin u$	u dérivable

Exemple. $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x^2+3>0$) et $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

3. Dérivées successives

Si f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''. Plus généralement, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, définie par $f^{(1)}=f'$ et $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

3 Théorème de Rolle. Accroissements finis

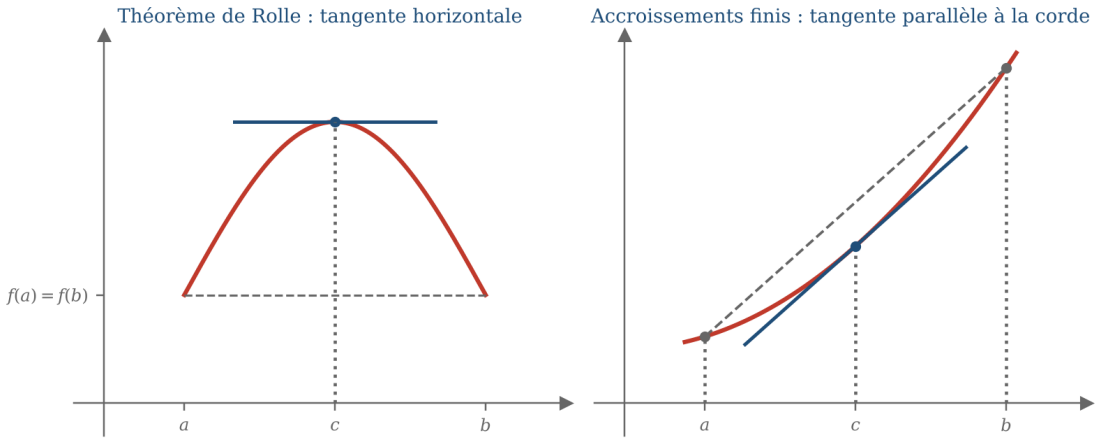
◆ Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction **continue sur** $[a,b]$, **dérivable sur** $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

◆ Théorème des accroissements finis

Soit $a<b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$



Interprétation graphique des deux théorèmes.

◆ Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$.

– Si $m\leq f'(x)\leq M$ pour tout x de $]a,b[$, alors $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.

– **Corollaire.** Si f est dérivable sur un intervalle I et si $|f'(x)|\leq M$ pour tout x de I, alors $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$ pour tous réels a et b de I.

◆ Méthode — établir une inégalité

– *Par les accroissements finis* : lorsque l'inégalité fait apparaître une différence $f(b)-f(a)$; on encadre f' sur $]a,b[$.

– *Par une fonction auxiliaire* : pour montrer $u(x)\leq v(x)$ sur I, on étudie les variations de $\varphi=v-u$ et l'on utilise une valeur connue de φ (souvent $\varphi(a)=0$).

4 Dérivée et variations

◆ Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

– f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.

– Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I ; si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

– Si f' est strictement positive sur I, ou plus généralement si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est **strictement** croissante sur I (énoncé analogue pour la stricte décroissance).

◆ Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si f est (strictement) croissante sur $]a,b[$, alors f est (strictement) croissante sur $[a,b]$; de même pour la décroissance.

◆ Extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

– Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

– Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

◆ Attention

$f'(a)=0$ ne suffit pas : pour $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$ mais f n'a pas d'extremum en 0.

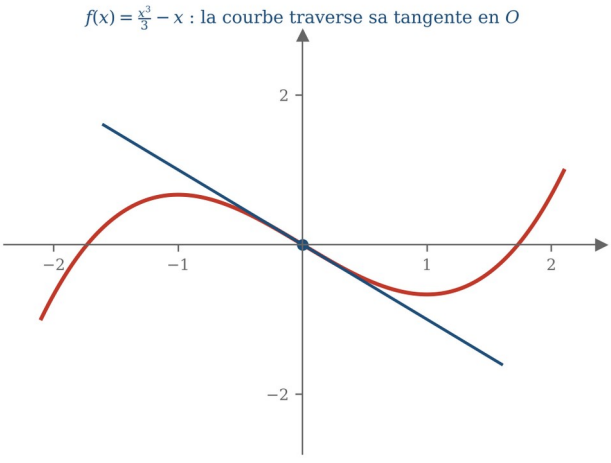
5 Point d'inflexion

◆ Définition

Soit f une fonction dérivable en a. Le point $A(a,f(a))$ est un **point d'inflexion** de C_f si la courbe traverse sa tangente en ce point.

◆ Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,a+h[$ $(h>0)$. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a,f(a))$ est un point d'inflexion de C_f.



Exemple de point d'inflexion : $f''(x)=2x$ s'annule en 0 en changeant de signe.