EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 2 — Suites réelles

Exercices 1 à 4 : récurrence, calcul du terme général et premières limites. Exercices 5 à 13 : suites récurrentes. Exercices 14 à 21 : suites couplées et suites adjacentes. Exercices 22 et 23 : synthèse.

Exercice 1

On considère l'écriture $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ comportant n radicaux ; on la note a_n : $a_1=\sqrt{2}$ et $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. On pose $a_0=0$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}a_n$ et $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-a_{n-1}}$.
2. En déduire que $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-a_{n-1}}$, c'est-à-dire $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (n radicaux).

Exercice 2

Soit $\alpha\in[-1,1]$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq0$ et $f(0)=\alpha$.

1. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{1}{4n+1}$ et $v_n=\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{1}{4n-1}$. Calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$.
2. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle f est continue en 0 ?

Exercice 3

Exprimer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants.

1. $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+n$.
2. $u_0=3$, $u_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.
3. $u_0=3$, $u_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=2u_n-u_{n+1}$.
4. $u_0=\dfrac{2}{5}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $3(n+1)u_n=2(n+2)u_{n-1}$.

Exercice 4

1. Soit x un réel tel que $0<x\leq1$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $(1+x)^k\leq1+2^kx$.
2. Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n=\dfrac{n^3}{3^n}$.
   a) Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3$.
   b) En déduire que, pour tout $n\geq16$: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leq\dfrac{1}{2}$.

c) Montrer que, pour tout $n \geq 16$: $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} x_{16}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Exercice 5

Soit a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$ et (u_n) la suite définie par $u_1 = a + b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

1. On suppose que $a < b$.
   a) Montrer que (u_n) est minorée par b.
   b) Étudier la monotonie de (u_n) ; en déduire qu'elle est convergente.
2. On suppose toujours $a < b$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire u_n en fonction de n, a et b.
   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. On suppose que $a = b$.
   a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et a, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 6

Soit p un réel tel que $p > 1$ et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{p + (p-1)x}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq p$.
   b) Étudier la monotonie de (u_n).
   c) En déduire que (u_n) est convergente.
2.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - p| \leq \frac{p-1}{p} |u_n - p|$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - p| \leq p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 9}{2u_n}$.

1. Montrer que $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$ sont de signes contraires.

2. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_{2p} \leq 3 \leq u_{2p+1}$.
3. En déduire que si (u_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.
4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 2$.
5.
   a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $|u_n - 3| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 3|$.
   b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $|u_n - 3| \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.
   c) Montrer que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 8

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$.
2. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 2$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$.
   c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $|a_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et $|b_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$.
   d) Étudier alors la convergence des suites (u_{2p}) et (v_{2p}), puis celle de (u_n) et (v_n).

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout réel positif x : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. Soit x un réel positif fixé et $(u_n(x))$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{kx}{n^2}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{(n+1)^2 x^3}{24n^4} \leq u_n(x) \leq \frac{(n+1)x}{2n}$.
   b) En déduire que $(u_n(x))$ est convergente et calculer sa limite.
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^3\frac{k}{n^2}$.
   a) Montrer que, pour tout réel x : $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

b) En déduire que $v_n=\frac{3}{4}u_n(1)-\frac{1}{4}u_n(3)$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 10

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-5x-1$.
2. En déduire que l'équation $x^3-5x-1=0$ possède trois solutions a, b, c avec $a<b<c$. Donner des valeurs approchées par défaut de a, b, c à 10^{-1} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n^3-1)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

b) Si la suite (u_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

c) Étudier la suite (u_n) dans les trois cas particuliers : $u_0=-3$; $u_0=0$; $u_0=3$.

Exercice 11

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<1$.

b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n=\frac{1-u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n^2$.

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{1}{3^{2^n}}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et l'expression de u_n.

d) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n=v_0v_1\cdots v_n$. Calculer p_n puis $\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n}{v_{n+1}}$.

3. Soit (s_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0<1-u_n<\frac{1}{1+u_0^2}(1-u_{n-1})$.

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<1-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1-\frac{5}{n}[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n]\le s_n\le 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

Exercice 12

Soit a un réel strictement positif et (u_n) la suite définie par $u_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$.

1. Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>0$.
3. On suppose dans la suite que $u_0^2\neq a$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n-\sqrt{a}\right)^2$.
   b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}+\sqrt{a}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n+\sqrt{a}\right)^2$.
   c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\neq\sqrt{a}$.
   d) Montrer que si (u_n) est convergente, elle converge nécessairement vers $\sqrt{a}$.
   e) Montrer que (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1, qu'elle converge, et déterminer sa limite.
4. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}$.
   a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   b) En déduire v_n en fonction de n et v_0.
   c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. On suppose que $u_0=\frac{3}{2}\sqrt{a}$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>\sqrt{a}$.
   b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-\sqrt{a}<\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{a}\right)$.
   c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n-\sqrt{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{a}$.
   d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   a) Étudier les variations de f.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$.
   c) Montrer que si $1\leq x\leq\sqrt{3}$, alors $1\leq f(x)\leq\sqrt{3}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

b) Étudier la monotonie de (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

a) Montrer que (v_n) est bien définie et que c'est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de u_n.

c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq s_n \leq 3n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ et $\dfrac{\lim\limits_{n \to +\infty} s_n}{n^2}$.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_n = \dfrac{s_n}{n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n s_{n+1} - (n+1) s_n = n u_n^2 - s_n$.

b) En déduire que (r_n) est croissante.

c) Montrer que (r_n) est convergente ; on note l sa limite.

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$.

a) Montrer que : $(n - p) u_p^2 \leq s_n \leq n u_{n-1}^2$.

b) En déduire que : $\dfrac{n - p}{n} u_p^2 \leq r_n \leq u_{n-1}^2$.

c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $u_p^2 \leq l \leq 3$. En déduire la valeur de l.

Exercice 14

On se donne deux réels a et b tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Établir une relation entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$.
2. En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n, a et b.
3. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, n, a et b.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on déterminera.

Exercice 15

On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0>0$, $v_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } \frac{1}{v_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n\geq v_n$ et $u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{2}(u_n-v_n)$.
2. Montrer que, à partir du rang 1, (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante et en déduire la limite commune.

Exercice 16

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1}=\sqrt{v_n\frac{u_n+v_n}{2}}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $l>0$.
2. On suppose que $a=b\cos\varphi$ avec $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Exprimer l en fonction de b et φ.

Exercice 17

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sqrt{n}\frac{C_{2n}^n}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Prouver par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n\leq\sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
3. Montrer qu'il existe $l\in[\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.
4. Montrer que, pour tout $x>0$: $\frac{1}{4(2x+1)}\leq\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x(x+1)}\leq\frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$.
5. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{u_k}{8\left(k+\frac{1}{2}\right)}-\frac{u_k}{8\left(k+\frac{3}{2}\right)}\leq u_{k+1}-u_k\leq\frac{u_k}{8k}-\frac{u_k}{8(k+1)}$.
6. Encadrer u_p-u_n (pour $p>n$), puis établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{u_n}{4(2n+1)}\leq l-u_n\leq\frac{l}{8n}$.
7. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|l-\left(1+\frac{1}{8n}\right)u_n\right|\leq\frac{l}{16n^2}$.

8. Comment suffit-il de choisir n pour que $\left(1+\frac{1}{8n}\right)u_n$ soit une valeur approchée de l à 10^{-5} près ?

Exercice 18

Prouver que la suite de terme général $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 19

On considère la suite de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n\geq 1$.

1. Montrer que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 20

On considère la suite de terme général $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}$, $n\geq 0$.

1. Montrer que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 21

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$, et les suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ définies par $u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n v_n\left(u_n+v_n\right)}{u_n^2+v_n^2} \text{ et } v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n>u_n$.
2. Montrer que les deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont convergentes.
3. En déduire que les deux suites sont adjacentes.
4. Montrer que la suite $\left(w_n\right)$ de terme général $w_n=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}$ est constante.
5. En déduire la limite commune des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ en fonction de a et b.

Exercice 22

1. Pour tout entier naturel n, on note $F_n=2^{2^n}+1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $F_0\times F_1\times\ldots\times F_n=F_{n+1}-2$.
3. Montrer que la suite $\left(F_n\right)$ est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

Exercice 23

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Soit l, k et x des réels tels que $0<k<1$ et $0<x<1$; (u_n) et (v_n) sont des suites réelles.

1. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-l|\leq k|u_n-l|$, alors (u_n) est convergente.
2. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-l|\leq k|u_n-l|$, alors la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}u_j$ est convergente.
3. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+2}-l|\leq k|u_n-l|$, alors (u_n) est convergente.
4. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq k|u_{n+1}-u_n|$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
5. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-l|\leq k|u_n-l|+x^n$, alors (u_n) est convergente.
6. Si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors (u_n-v_n) est décroissante.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2+u_nv_n+v_n^2)=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
8. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.