COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 2 — Suites réelles

◆ **Sommaire**

1. Rappels
2. Limite d'une suite
3. Comparaison et encadrement
4. Suites monotones
5. Suites récurrentes un+1=fun
6. Suites adjacentes

◆ **Objectifs du chapitre**

– Conduire un raisonnement par récurrence.

– Étudier la monotonie d'une suite, montrer qu'elle est majorée, minorée ou bornée.

– Calculer la limite d'une suite à l'aide des opérations, des suites géométriques, de la comparaison ou de l'encadrement.

– Établir la convergence d'une suite monotone et déterminer sa limite, en particulier pour une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$.

– Exploiter une inégalité du type $|u_{n+1}-l|\leq k|u_n-l|$.

– Reconnaître et utiliser deux suites adjacentes.

Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 2).

1 Rappels

1. Suites arithmétiques, suites géométriques

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$v_{n+1}=q\,v_n$
Terme général	$u_n=u_0+nr$	$v_n=v_0q^n$
Entre deux rangs	$u_n=u_p+(n-p)r$	$v_n=v_pq^{n-p}$
Somme	$\sum_{k=p}^{n}u_k=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$	$\sum_{k=p}^{n}v_k=v_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\ (q\neq1)$

En particulier : $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ et, pour $q\neq1$, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Monotonie, suites bornées

◆ Définitions

Une suite (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.

Elle est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n, **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n, **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

◆ Méthode — étudier la monotonie

– Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

– Si $u_n > 0$ pour tout n : comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

– Si $u_n = f(n)$: étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

– Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f **croissante** sur un intervalle I contenant tous les termes : $u_{n+1} - u_n$ a le signe de $u_1 - u_0$ (récurrence).

3. Le raisonnement par récurrence

◆ Principe

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$; on suppose $P(n)$ vraie et l'on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

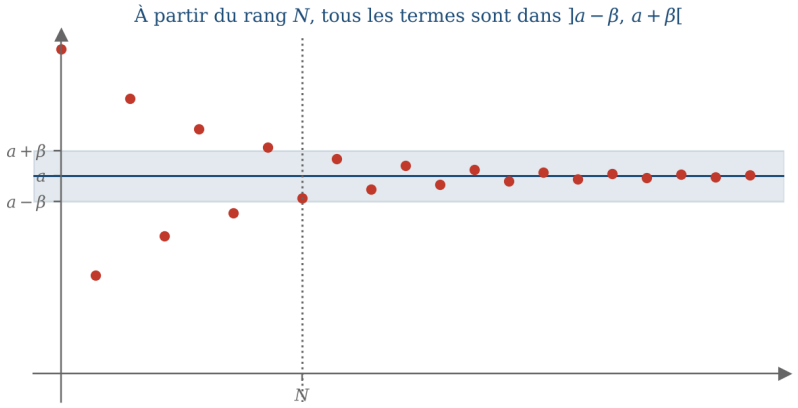
2 Limite d'une suite

1. Définitions et premières propriétés

◆ Définition

Une suite (u_n) **converge** vers un réel a si, pour tout réel $\beta > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que $u_n > A$ dès que $n \geq N$.



Suite convergente vers a.

◆ Théorème

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ si, et seulement si, } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a.$$

◆ Théorème

Toute suite convergente est bornée.

◆ Attention

La réciproque est fausse : la suite $\left((-1)^n\right)$ est bornée et divergente, puisque $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$.

2. Limites et ordre

◆ Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers les réels a et b.

– S'il existe un entier N tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$, alors $a \geq 0$.

– S'il existe un entier N tel que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq N$, alors $m \leq a \leq M$.

– S'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$, alors $a \leq b$.

◆ Attention

Le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges : $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$, mais la limite est 0.

3. Suites géométriques

◆ Théorème

Soit q un réel.

– Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

– Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

– Si $q=1$, la suite (q^n) est constante égale à 1.

– Si $q\leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

4. Image d'une suite par une fonction

◆ Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I. Si (u_n) converge vers un réel a de I, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

◆ Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ et $\lim\limits_{x\to l} f(x)=L$ (l et L finis ou infinis), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=L$.

Exemple. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{1}{n}=1$, car $\dfrac{1}{n}\to 0$ et $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{x}=1$.

3 Comparaison et encadrement

◆ Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites et a un réel. S'il existe un entier N tel que $v_n\leq u_n\leq w_n$ pour tout $n\geq N$, et si $\lim v_n=\lim w_n=a$, alors $\lim u_n=a$.

◆ Corollaire

S'il existe un entier N tel que $|u_n-a|\leq v_n$ pour tout $n\geq N$ et si $\lim v_n=0$, alors $\lim u_n=a$.

◆ Théorème de comparaison

On suppose qu'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$.

– Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

– Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

◆ **Méthode — inégalité de contraction**

Si l'on a établi, pour tout n, $|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$ avec $0 < k < 1$, alors, par récurrence,

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|,$$

et comme $\lim k^n = 0$, la suite (u_n) converge vers l.

4 Suites monotones

◆ **Théorème (admis)**

– Toute suite croissante et majorée converge vers un réel a, et $u_n \leq a$ pour tout n.

– Toute suite décroissante et minorée converge vers un réel b, et $u_n \geq b$ pour tout n.

◆ **Théorème**

– Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

– Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

◆ **Attention**

Un majorant n'est pas la limite : le théorème assure l'existence de la limite, pas sa valeur. Pour la déterminer, on utilise par exemple le théorème du paragraphe suivant.

5 Suites récurrentes un+1=fun

◆ **Théorème**

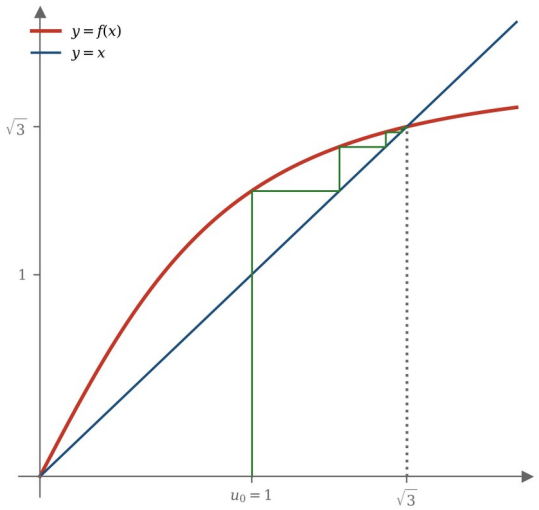
Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Si (u_n) converge vers un réel a et si f est continue en a, alors $f(a) = a$.

◆ Méthode

Méthode — plan d'étude d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Trouver un intervalle I **stable** par f ($f(I)\subset I$) contenant u_0 : alors $u_n\in I$ pour tout n (récurrence).
2. Étudier la monotonie (signe de $f(x)-x$ sur I, ou croissance de f sur I).
3. Conclure à la convergence (suite monotone et bornée).
4. Résoudre $f(x)=x$ dans I et sélectionner la limite à l'aide des inégalités vérifiées par (u_n).

Si f est décroissante, la suite n'est pas monotone : on étudie (u_{2n}) et (u_{2n+1}), ou l'on cherche une inégalité de contraction.



Construction des termes d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$: cas f croissante (« escalier », exercice 13).

6 Suites adjacentes

◆ Définition et théorème

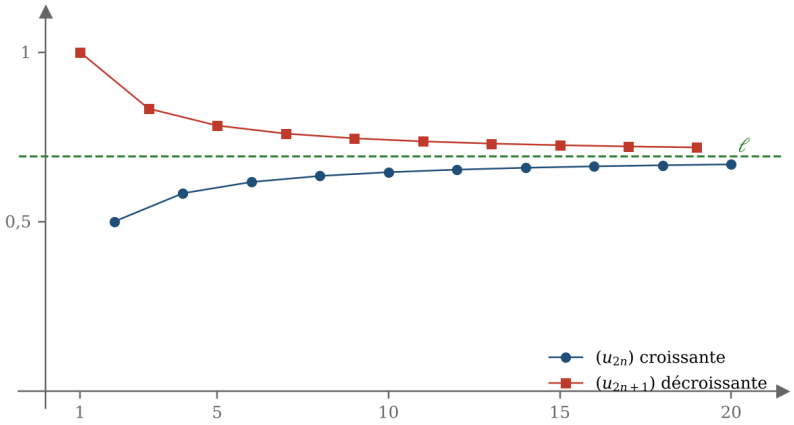
Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :

– pour tout n, $u_n\le v_n$;

– (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

– la suite (v_n-u_n) converge vers 0.

Dans ce cas, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l, et $u_n\le l\le v_n$ pour tout n.



Deux suites adjacentes (exercice 19).