EXERCICES • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 — Continuité et limites

Les exercices 1 à 9 portent sur le calcul de limites et les branches infinies, les exercices 10 à 13 sur la continuité, les exercices 14 à 17 sur des limites plus délicates, les exercices 18 à 22 sur le théorème des valeurs intermédiaires ; les exercices 23 et 24 sont des exercices d'approfondissement.

Exercice 1

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-3x+1\right)$ **h)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ **i)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

j) $\dfrac{\lim\limits_{x\to a}ax^n-xa^n}{x-a}$, où $(a,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$

k) $\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}1}{x^n}\left[\dfrac{1}{1-x}-\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)\right]$, où $n\in\mathbb{N}^*$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2\pi x-1}{3x-2}\right)$ **n)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\sqrt{x}-1}{x}$ **o)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2\right)$ **q)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$

Exercice 2

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes.

a) $\dfrac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}1-\tan x}{\cos 2x}$ **b)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

d) $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-1)\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$ **f)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\tan x$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to a}\left(a^2-x^2\right)\tan\frac{\pi x}{2a}$, où $a\in\mathbb{R}^*$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x+\sin x}{x-1}$.

Montrer que, pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2-\cos x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $\frac{1}{3}\leq f(x)\leq 1$.
2. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2-\cos x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-\cos x)}$.

Exercice 5

Soit la fonction $f:x\mapsto 3x+2\sin x$.

1.
   a) Montrer que, pour tout réel x, $3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{x}{f(x)}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=\frac{1}{5}$.
   a) Vérifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que g est continue en 0.
   b) Montrer que, pour tout $x\in]\frac{2}{3},+\infty[$, $\frac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\frac{x}{3x-2}$.
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 6

Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Montrer que, pour tout $x>1$, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}\leq\varphi(x)\leq\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. En déduire la limite de φ en $+\infty$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ par $f(x)=\frac{-x+\cos x}{2x+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x>-\frac{1}{2}$, $\frac{-x-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{-x+1}{2x+1}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ et $\dfrac{\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 9

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n:x\mapsto 1+\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ et l'on désigne par C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Étudier suivant n : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{m\sqrt{x^2+3}-2m|x|}{x^2-1} & \text{si } |x|\neq 1\\ 2x^3+px+1 & \text{si } |x|=1\end{cases}$$

Déterminer les réels m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-|x|}-ax & \text{si } x\in]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty[\\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} & \text{si } x\in]-1,0[\cup]0,1[\end{cases}$$

où a est un réel.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier suivant a la continuité de f en 1 et en -1.
3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-7x^2+x+5}$ si $x\neq 1$ et $f(1)=a$, où a est un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}-1}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Peut-on parler de limite de f en 0 ? Justifier.
3. Déterminer le domaine de continuité D_c de f.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 14

Calculer, quand elles existent, les limites suivantes (E désigne la fonction partie entière).

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **c)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} E\left(\dfrac{1}{x}\right)-x}{E\left(\dfrac{1}{x}\right)+x}$ **d)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} E\left(\dfrac{x}{2010}\right)}{x}$

e) $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} xE(x)+3}{x^2+\sin x}$ **f)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x}{2-\sin x}$ **g)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sin x}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ **i)** $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} 2\cos^2\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}+3}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 15

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Les fonctions f et g sont définies au voisinage du réel a, sauf peut-être en a.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ et si $f(x)>g(x)$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ et si $g(x)<0$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=-\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, alors soit $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} 1}{f(x)}=+\infty$, soit $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} 1}{f(x)}=-\infty$.

Exercice 16

On admet que la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ possède une limite réelle l en 0.

1. En transformant convenablement $f(2x)$, trouver la valeur de l.
2. Utiliser le résultat précédent pour déterminer $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\tan x - x}{x^3}$ et $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} 1-\cos x - \dfrac{x^2}{2}}{x^4}$.

Exercice 17

Calculer $\dfrac{\lim\limits_{x\to 4} 16\sqrt{x-\sqrt{x}} - 3\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}}{16(x-4)^2}$.

Exercice 18

1. Démontrer que l'équation $x^3+x-3=0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.
2. Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} près.

Exercice 19

Démontrer que l'équation $x^4+x^3-x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20

1. Montrer que l'équation $x^3-5x^2+4x+7=0$ admet au moins une solution réelle.
2. Plus généralement, montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une solution réelle.
3. Qu'en est-il si le degré est pair ?

Exercice 21

1. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.
2. Plus généralement, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b])\subset[a,b]$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.
3. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et α, β deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c)$.

Exercice 22

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ pour laquelle il existe un réel $k\in]0,1[$ tel que, pour tous réels distincts x et y de $[a,b]$, $|f(x)-f(y)|<k|x-y|$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution et une seule dans $[a,b]$.

Exercice 23

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 et telles que, pour tout réel x, $f(2x)=f(x)$.

Exercice 24

Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 et telles que, pour tout réel x, $f(2x)=f(x)\cos x$.