COURS • 4ÈME ANNÉE MATHÉMATIQUES

Chapitre 1 — Continuité et limites

◆ **Sommaire**

1. Continuité
2. Limites : rappels et compléments
3. Continuité et limite d'une fonction composée
4. Limites et ordre
5. Branches infinies
6. Théorème des valeurs intermédiaires
7. Image d'un intervalle. Fonctions monotones

◆ **Objectifs du chapitre**

– Justifier la continuité d'une fonction en un réel ou sur un intervalle, prolonger une fonction par continuité.

– Lever une indétermination et calculer la limite d'une fonction, en particulier d'une fonction composée.

– Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement.

– Reconnaître et interpréter graphiquement une branche infinie.

– Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour établir l'existence, puis l'unicité, d'une solution d'une équation $f(x)=k$.

– Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et C_f désigne la courbe représentative d'une fonction f. Le plan du cours suit celui du manuel officiel (Tome 1, chapitre 1).

1 Continuité

1. Continuité en un réel, sur un intervalle

◆ **Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

La fonction f est **continue en** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Elle est **continue à droite** (respectivement **à gauche**) en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$).

La fonction f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à droite et à gauche en a.

◆ Définition

Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.

Une fonction est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b. On définit de même la continuité sur $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$.

◆ Théorème (fonctions usuelles)

– Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

– Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.

– Les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; la fonction $x\mapsto\tan x$ est continue en tout réel de son ensemble de définition.

– La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

◆ Théorème (opérations)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

– Si f est continue en a, alors les fonctions αf ($\alpha\in\mathbb{R}$), $|f|$ et f^n ($n\in\mathbb{N}^*$) sont continues en a.

– Si f et g sont continues en a, alors $f+g$ et $f\times g$ sont continues en a.

– Si f et g sont continues en a et $g(a)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

– Si f est continue en a et $f(a)>0$, alors $\sqrt{f}$ est continue en a.

2. Prolongement par continuité

◆ Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I. Si f admet une limite finie l en a, alors la fonction g définie sur I par

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a \\ l & \text{si } x=a \end{cases}$$

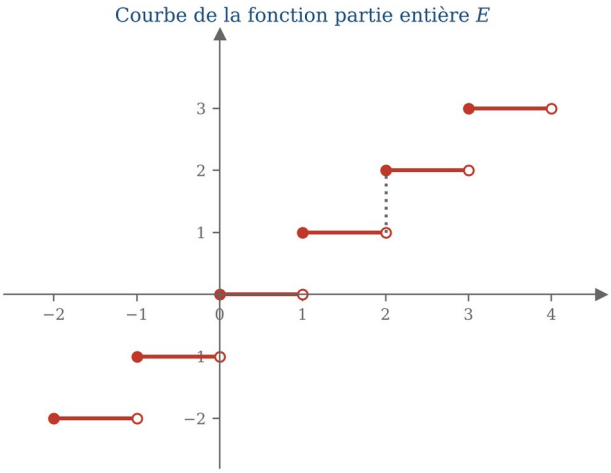
est continue en a. On dit que g est le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

3. Un exemple à connaître : la fonction partie entière

Pour tout réel x, on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Ainsi $E(2,2) = 2$, $E(-2,2) = -3$ et, pour tout réel x,

$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \text{ c'est-à-dire } x - 1 < E(x) \leq x.$$



La fonction partie entière est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Étudions la continuité de E en 2. Pour $x \in [1,2[$, $E(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$. Pour $x \in [2,3[$, $E(x) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2 = E(2)$. La fonction E est continue à droite en 2, mais elle n'est pas continue à gauche en 2 : **E n'est pas continue en 2.**

Plus généralement, E est continue sur chaque intervalle $[n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$ et discontinue en tout entier relatif.

2 Limites : rappels et compléments

1. Limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

◆ Théorème

– La limite à l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

– La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple. $\dfrac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x^2\right) = -\infty.$

◆ Attention

Ce théorème ne s'applique **qu'à l'infini**. En un réel a, on calcule directement, on factorise par $(x-a)$ ou l'on étudie le signe du dénominateur.

2. Limites trigonométriques usuelles

◆ À retenir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$$

Pour tout réel a non nul :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}.$$

Exemple. Pour x voisin de 0 et non nul,

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x},\ \text{donc}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

3. Formes indéterminées

Les quatre formes indéterminées sont « $+\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

◆ Méthode — lever une indétermination

– Fonction rationnelle en a (forme $\frac{0}{0}$) : factoriser numérateur et dénominateur par $(x-a)$.

– Présence de radicaux : multiplier par l'**expression conjuguée**, ou factoriser le terme dominant sous le radical en se souvenant que $\sqrt{x^2}=|x|$.

– Expressions trigonométriques : se ramener aux limites usuelles, au besoin par un changement de variable ($h=x-a$).

– Fonction bornée multipliée par une fonction de limite nulle, partie entière : penser aux théorèmes de comparaison (paragraphe IV).

3 Continuité et limite d'une fonction composée

◆ Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I) \subset J$. La fonction **composée** de u et v, notée $v \circ u$, est définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

◆ Théorème (continuité)

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $u(a)$. Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors $v \circ u$ est continue en a.

◆ Corollaire

La composée de deux fonctions continues est continue.

◆ Théorème (limite, admis)

Soit u et v deux fonctions, et a, b, c finis ou infinis.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{y \to b} v(y) = c, \text{ alors } \lim_{x \to a} v \circ u(x) = c.$$

Exemple. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{1+\pi x}{2x}\right)$. On a $\dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\pi x}{2x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} \pi x}{2x} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} \sin y = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ car la fonction sinus est continue en $\dfrac{\pi}{2}$. Par composition, la limite cherchée vaut 1.

4 Limites et ordre

◆ Théorème (comparaison et encadrement)

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I, sauf peut-être en un réel a de I, et l, l' deux réels.

– Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = l$ et $\lim\limits_a v = l'$, alors $l \leq l'$.

– Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = \lim\limits_a v = l$, alors $\lim\limits_a f = l$.

– Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.

– Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_a u = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

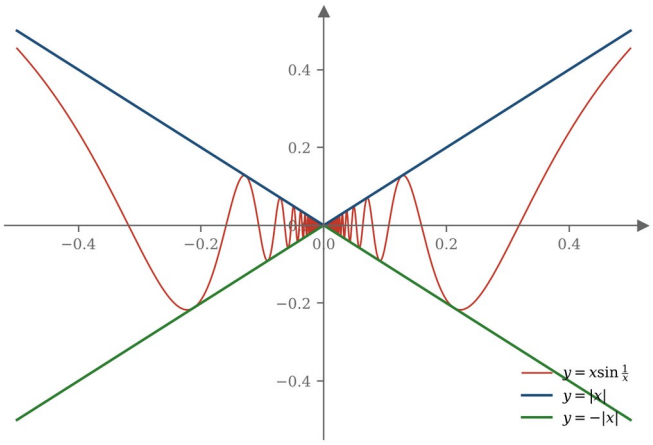
Ces résultats restent valables pour les limites à l'infini, à droite ou à gauche en a.

◆ **Conséquence très utilisée**

Si $|f(x)-l|\leq u(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{a} u=0$, alors $\lim\limits_{a} f=l$.

En effet, $l-u(x)\leq f(x)\leq l+u(x)$ et les deux fonctions encadrantes tendent vers l.

Exemple 1. Pour tout réel $x\neq 0$, $|x\sin\dfrac{1}{x}|\leq|x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.



La courbe de $x\mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ *est comprise entre celles de* $x\mapsto|x|$ *et* $x\mapsto-|x|$.

Exemple 2. Soit $f(x)=x^2(2+\cos x)$. Pour tout réel x, $2+\cos x\geq 1$, donc $f(x)\geq x^2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5 Branches infinies

Soit f une fonction et C_f sa courbe. Les résultats suivants sont énoncés en $+\infty$; ils sont analogues en $-\infty$.

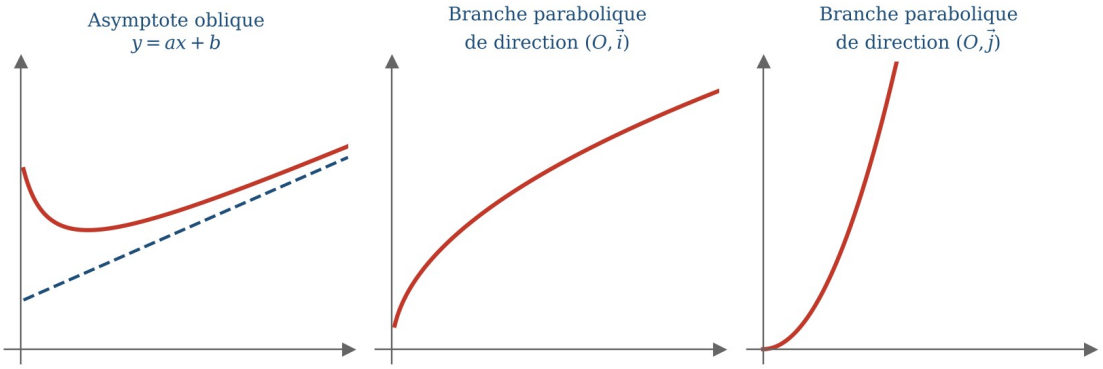
◆ **Asymptotes parallèles aux axes**

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ (éventuellement à droite ou à gauche seulement), la droite d'équation $x=a$ est une asymptote à C_f.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (b réel), la droite d'équation $y=b$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$, on étudie $\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{x}$:

Résultat	Étape suivante	Conclusion pour C_f au voisinage de $+\infty$
$\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{x}=\pm\infty$	—	branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Résultat	Étape suivante	Conclusion pour C_f au voisinage de $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	—	branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,\ a\neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$, b réel	la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,\ a\neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=\pm\infty$	branche parabolique de direction celle de la droite $y=ax$



Les principales branches infinies.

◆ Position relative

La position de C_f par rapport à une asymptote $\Delta: y=ax+b$ est donnée par le signe de $f(x)-(ax+b)$: C_f est au-dessus de Δ lorsque cette différence est positive.

6 Théorème des valeurs intermédiaires

◆ Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

◆ Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux réels de I tels que $a<b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède **au moins une** solution dans $[a,b]$.

◆ Corollaire 1

Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution dans $]a,b[$.

◆ Corollaire 2 (unicité)

Si f est continue et **strictement monotone** sur un intervalle I et si $a<b$ sont deux réels de I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans $[a,b]$.

◆ Corollaire 3 (signe)

Si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule en aucun réel de I, alors f garde un signe constant sur I.

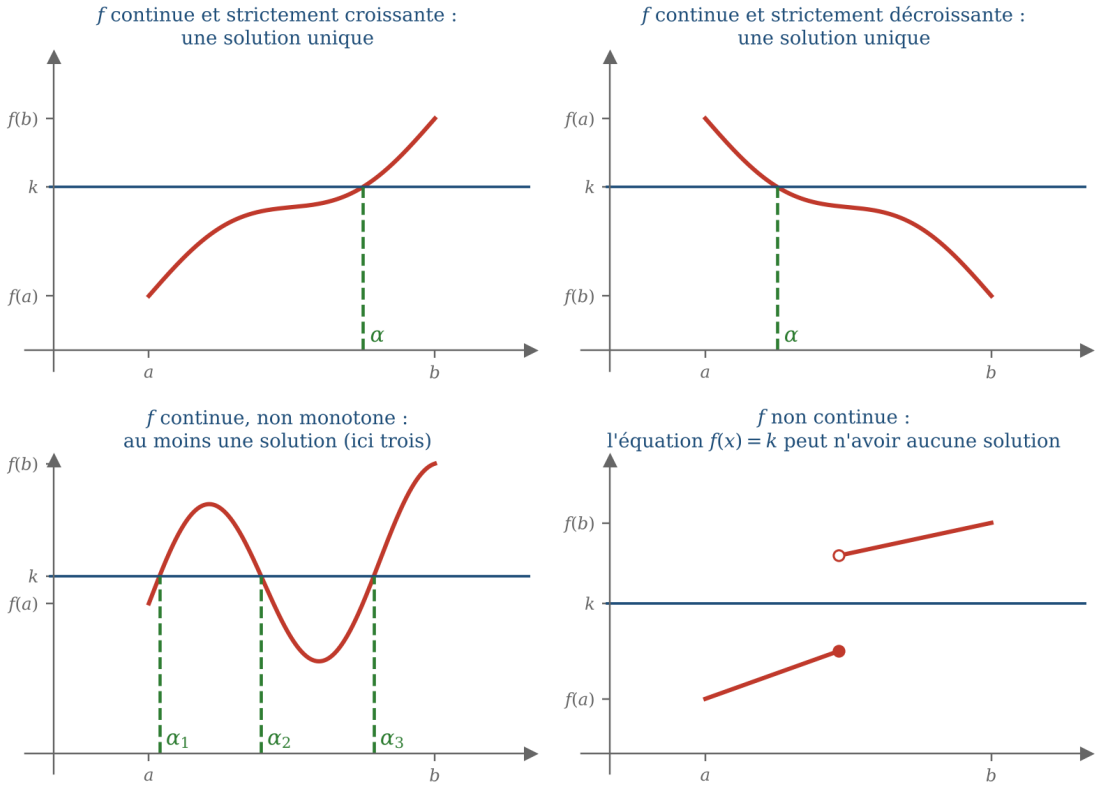


Illustration du théorème des valeurs intermédiaires et de ses limites.

Exemple. Soit $f(x)=x^3+x-3$ sur $I=[1,2]$. La fonction f est continue sur I (polynôme) et strictement croissante sur I car $f'(x)=3x^2+1>0$. De plus $f(1)=-1<0$ et $f(2)=7>0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]1,2[$.

◆ Méthode

Méthode — rédiger une question « montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution α dans I ».

1. Justifier que f est **continue** sur I.
2. Justifier que f est **strictement monotone** sur I (signe de la dérivée, ou opérations).
3. Vérifier que k est **compris entre** les valeurs (ou les limites) de f aux bornes de I, c'est-à-dire que

$k \in f(I)$.

4. Conclure. Un encadrement de α s'obtient ensuite par balayage ou par **dichotomie**.

7 Image d'un intervalle. Fonctions monotones

◆ Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$; m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M son maximum.

◆ Théorème (limite d'une fonction monotone, admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

– Si f est croissante et majorée, alors f possède une limite finie en b.

– Si f est croissante et non majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b.

– Si f est décroissante et minorée, alors f possède une limite finie en b.

– Si f est décroissante et non minorée, alors f tend vers $-\infty$ en b.

◆ Théorème (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,f(a)]$
$]a,b]$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,f(b)]$	$f(I)=[f(b),\lim\limits_{a^+} f[$
$]a,b[$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f[$

Dans ce tableau, a et b peuvent être infinis lorsqu'ils sont exclus.

◆ Erreurs fréquentes

– Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans avoir justifié la **continuité**.

– Conclure à l'unicité sans la **stricte** monotonie.

– Écrire $\sqrt{x^2}=x$: on a $\sqrt{x^2}=|x|$, donc $\sqrt{x^2}=-x$ lorsque $x<0$.

– Utiliser la règle du terme de plus haut degré ailleurs qu'à l'infini.